

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АВТОПОЇЗДІВ НА ГАЛЬМІВНИХ РЕЖИМАХ

*Павло Прогній¹, к. т. н., Віктор Шевчук², к. т. н., Павло Попович¹, д. т. н.,
Руслан Розум¹, к. т. н., Микола Буряк¹, к. т. н., Андрій Папірко¹, PhD*

¹*Західноукраїнський національний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, Україна,*

e-mail: ppopovich@ukr.net; rozoom_ruslan@ukr.net; burjak74@ukr.net; andriypapinko@gmail.com

²*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,*

вул. Клепарівська, 35, м. Львів, Україна,

e-mail: shevtyk@meta.ua

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.179-184>

Прогній П., Шевчук В., Попович П., Розум Р., Буряк М., Папірко А. Математична модель дослідження стійкості автопоїздів на гальмівних режимах

Проаналізовано динаміку гальмування дволанкових автопоїздів. Це пов'язано з тим, що дволанкові автопоїзди набули широкого поширення та становлять основу транспортних парків більшості логістичних компаній в Україні й за кордоном. Для їх максимально ефективного використання необхідно забезпечити відповідність основним експлуатаційним властивостям, що визначають безпеку руху. Покращення експлуатаційних властивостей автопоїздів відбувається завдяки всебічному вивченню реальних умов їхнього руху та врахуванню змін, що відбуваються в системах транспортних засобів під впливом умов експлуатації. Водночас необхідно надавати великого значення змінам, що відбуваються в ходовій та гальмівній системах автопоїздів, адже зміни геометричних характеристик шасі автопоїздів безпосередньо впливають на його силові, кінематичні та жорсткісні властивості. А наявність перекосу осей автопоїздів зумовлює появу змін характеру розподілу реакцій у місцях контакту шин та опорної поверхні дорожнього полотна. У зв'язку з цим відбувається зміна гальмівних характеристик автопоїздів, які безпосередньо залежать від характеру взаємодії коліс з опорною поверхнею дорожнього полотна, що може спричинити погіршення стійкості руху транспортних засобів. Досліджено дволанкові напівпричепи, які складаються із двовісного тягача та тривісного напівпричепи, оснащеного неповоротними осями. Рівняння руху автопоїздів у режимах гальмування, враховуючи кути встановлення осей напівпричепів та величину гальмівних сил, що діють на колеса осей причіпної ланки, дозволяють визначити кути відхилення коліс автопоїздів та кінематичні параметри, необхідні для розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Ключові слова: математична модель, стійкість, гальмування, сидельний автопоїзд, перекошення осей, гальмівні сили.

Prohny P., Shevchuk V., Popovych P., Rozum R., Buriak M., Papinko A. Mathematical model for researching the stability of road trains during braking modes

The article analyzes the braking dynamics of two-link articulated road trains. This is because two-link road trains have become widespread and form the basis of the vehicle fleets of most logistics companies in Ukraine and abroad. For their maximum efficient use, it is necessary to ensure compliance with the main operational properties that determine traffic safety. Improvement of the operational characteristics of road trains is achieved through a comprehensive study of real operating conditions and consideration of changes occurring in vehicle systems under the influence of operating factors. At the same time, significant attention must be paid to changes occurring in the running gear and braking systems of road trains, since changes in the geometric characteristics of the chassis directly affect their force, kinematic, and stiffness properties. The presence of axle misalignment in road trains leads to changes in the distribution of reaction forces at the tire–road contact patches. As a result, the braking characteristics of road trains change, which directly depend on the nature of wheel–road interaction and may cause a deterioration in vehicle stability. The study investigates two-link semi-trailer combinations consisting of a two-axle tractor and a three-axle semi-trailer equipped with non-steering axles. The equations of motion for the road train during braking modes, which consider the axle installation angles of the semi-trailer and the magnitude of braking forces acting on the wheels of the trailer unit, enable the determination of wheel deviation angles and kinematic parameters essential for solving the system of differential equations.

Keywords: mathematical model, stability, braking, truck-trailer combination, axle misalignment, braking forces.

Постановка проблеми. Дволанкові сидельні автопоїзди отримали значне поширення та становлять основу транспортних парків більшості логістичних компаній України та зарубіжжя. Для їхнього використання із максимальною ефективністю

необхідно забезпечити дотримання ними основних експлуатаційних властивостей, що визначають безпеку руху. Для цього потрібно всебічно дослідити реальні умови їхнього руху та врахувати зміни, що виникають у системах транспортного

засобу під впливом умов експлуатації. При цьому важливе значення необхідно приділити змінам, які виникають у ходовій та гальмівній системах автомобільного поїзда. Відомо [1; 2-4; 5-8; 10-12], що вплив експлуатаційних факторів може спричинити порушення оптимальних характеристик регулювання та розташування гальмівних сил як по осях, так і по бортах автопоїздів, що негативно впливає на його гальмівну динаміку. А зміни геометричних характеристик ходової частини автопоїздів безпосередньо впливають на її силові, кінематичні та жорсткісні властивості. Адже наявність перекосу в осях ланок автопоїздів провокує зміни в характері розподілу реакцій у місцях контакту шин та опорної поверхні. У зв'язку з чим змінюються гальмівні характеристики автопоїздів, які безпосередньо залежать від характеру взаємодії коліс з опорною поверхнею, що може спричинити погіршення стійкості його руху.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Аналіз наукових досліджень [2; 4] дозволив з'ясувати, що основними причинами порушення працездатності вантажних транспортних засобів є відмови у гальмівній та ходовій системах. Зокрема у роботі [10] на основі аналізу технічного стану парку автопоїздів автори з'ясували, що близько 80 % тягачів та 90 % напівпричепів мають порушення геометрії ходової частини, що є причиною надмірного зношення їхніх шин та погіршення паливної економічності транспортних засобів. Невирішеним залишається питання прогнозування курсової стійкості автопоїзда із порушенням геометрії встановлення осей напівпричепа.

Постановка завдання. Актуальність та важливість даної проблеми обумовлює мету роботи, яка полягає в побудові математичної моделі сидельних автопоїздів із врахуванням кутів розміщення осей напівпричепа, а також характеру розподілення гальмівних сил щодо коліс їх бортів. З огляду на це, виникає завдання щодо прогнозування курсової стійкості руху автопоїзда із порушенням геометрії встановлення осей напівпричепа та порушенням оптимальних показників розподілу гальмівних сил.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо дволанкові сидельні автопоїзди, що містять дво-вісний автомобіль-тягач і тривісний напівприцеп, обладнаний неповоротними осями. Розрахункову схему таких автопоїздів наведено на рис.

Під технічною стійкістю у процесі гальмування приймається забезпечення процесу гальмування автопоїздів до повної їх зупинки, за умови дотримання безпечних режимів.

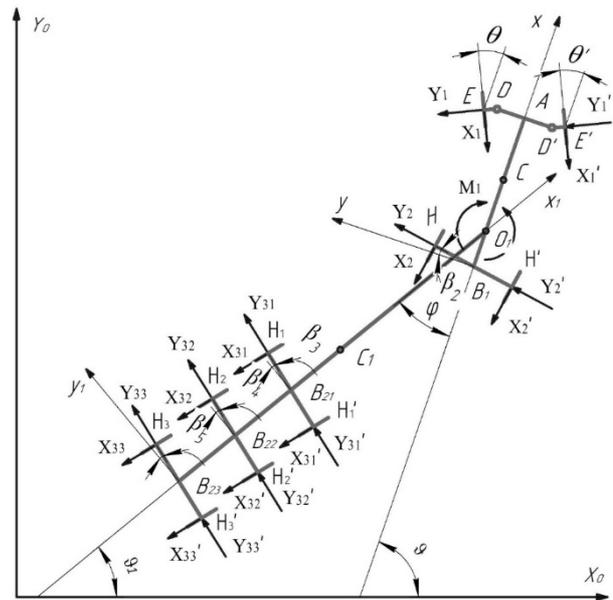


Рис. Розрахункова схема дволанкового сидельного автопоїзда

Fig. Calculation scheme for a two-unit road train

За аналогією із [9; 13] введемо такі позначення:

$Oxyz$ – інерційна система координат;

m, C, I – маса, центр мас і центральний момент інерції ведучої ланки відносно вертикальної осі, що проходить через центр мас (точка C);

m_1, C_1, I_1 – маса, центр мас і центральний момент інерції ведучої ланки відносно вертикальної осі, що проходить через центр мас (точка C_1);

x, y – абсциса і ордината точки C в системі координат $Oxyz$;

ϑ, ϑ_1 – курсові кути відповідних ланок автопоїздів;

ω, ω_1 – величина кутових швидкостей ланок автопоїздів;

θ – значення кута повороту керованих коліс;

$v = \dot{x} \cos \vartheta + y \sin \vartheta, u = -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta$ – проекції швидкості точки C на поздовжню та поперечну осі ведучої ланки відповідно;

v_1, u_1 – значення поздовжньої та поперечної проекцій вектора швидкості центра мас напівпричепа;

M_{c1}, M_{c2} – значення моментів опору повороту ланок автопоїздів;

$X_{\alpha\beta}, Y_{\alpha\beta}$ – величина поздовжніх та поперечних реакцій, що діють на колеса осей відповідних ланок автопоїздів;

φ – величина кута складання ланок автопоїздів;

β_i – значення кута перекосу i -ої осі;

k_{pi} – коефіцієнт нерівномірності гальмівних сил i -ої осі лівого борту автопоїзда;

k'_{pi} – коефіцієнт нерівномірності гальмівних сил i -ої осі правого борту автопоїзда;

J – момент інерції автомобіля-тягача відносно осі O_{1z_0} ;

J_1 – момент інерції напівпричепа відносно осі O_{1z_0} ;

L – база автомобіля-тягача;

L_{np} – база напівпричепа;

a – відстань від передньої осі до центра мас автомобіля-тягача;

b – відстань від задньої осі до центра мас автомобіля-тягача;

l_s – відстань від задньої осі автомобіля-тягача до точки зчипки з напівприцепом;

c – відстань від центра мас автомобіля-тягача до точки зчипки з напівприцепом;

a_1 – відстань від точки зчипки до центра мас напівпричепа;

b_1 – відстань від передньої осі до центра мас напівпричепа;

b_2 – відстань від середньої осі до центра мас напівпричепа;

b_3 – відстань від задньої осі до центра мас напівпричепа;

$a = AC, b = CB_1, l_s = O_1B_1, c = O_1C, a_1 = O_1C_1, b_1 = C_1B_{21}, b_2 = C_1B_{22}, b_3 = C_1B_{23}, p = DE, p' = D'E', n_1 = AD, n'_1 = AD', n_2 = B_1H, n'_2 = B_1H', n_3 = B_{21}H_1, n'_3 = B_{21}H'_1, n_4 = B_{22}H_2, n'_4 = B_{22}H'_2, n_5 = B_{23}H_3, n'_5 = B_{23}H'_3, L_1 = a_1 + b_1, L_2 = a_1 + b_2, L_3 = a_1 + b_3$ – геометричні параметри автопоїзда.

Використовуючи метод перетинів, складемо диференціальні рівняння руху автопоїздів на гальмівних режимах із врахуванням кутів встановлення осей напівпричепа та величини гальмівних сил, що діють на колеса осей причіпної ланки. Skorистаємося методикою, наведеною в роботі [14]. Умовно розділимо автомобільний поїзд на окремі ланки, ввівши горизонтальні зусилля P_x та P_y і вертикальне навантаження P_z в опорно-зчипному пристрої.

Відповідно до принципу д'Аламбера, системи активних сил, сил реакцій та сил інерції, які діють на ланки автопоїзда, однакові. Рівняння плоскопаралельного руху для окремих ланок автопоїзда запишемо у вигляді:

для автомобіля-тягача:

$$\begin{aligned} m(\dot{v} - \omega u) - X_1 \cos \theta - X'_1 \cos \theta' - Y_1 \sin \theta - Y'_1 \sin \theta' - \\ - (X_2 + X'_2) \cos \beta_2 - (Y_2 + Y'_2) \sin \beta_2 + P_x = 0; \\ m(\dot{u} - \omega v) + Y_1 \cos \theta + Y'_1 \cos \theta' - X_1 \sin \theta - X'_1 \sin \theta' - \\ - (X_2 + X'_2) \sin \beta_2 + (Y_2 + Y'_2) \cos \beta_2 + P_y = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} = (-X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta)(a - p \sin \theta) + (-X'_1 \sin \theta' + Y'_1 \cos \theta')(a - p \sin \theta') + \\ + (X_1 \cos \theta + Y_1 \sin \theta)(n_1 + p \cos \theta) - (X'_1 \cos \theta' + Y'_1 \sin \theta')(n_1 + p \cos \theta') - \\ - X_2(n_2 - b \sin \beta_2) - X'_2(n_2 + b \sin \beta_2) - (Y_2 + Y'_2)b \cos \beta_2 - P_y c - M_{c1}. \end{aligned}$$

для напівпричепа:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - \omega_1 u_1) - (X_{31} + X'_{31}) \cos \beta_3 + (Y_{31} + Y'_{31}) \sin \beta_3 - (X_{32} + X'_{32}) \cos \beta_4 + \\ + (Y_{32} + Y'_{32}) \sin \beta_4 - (X_{33} + X'_{33}) \cos \beta_5 + (Y_{33} + Y'_{33}) \sin \beta_5 - P_x \cos \varphi + P_y \sin \varphi = 0; \\ m_1(u_1 - \omega_1 v_1) - (X_{31} + X'_{31}) \sin \beta_3 + (Y_{31} + Y'_{31}) \cos \beta_3 - (X_{32} + X'_{32}) \sin \beta_4 + \\ + (Y_{32} + Y'_{32}) \cos \beta_4 - (X_{33} + X'_{33}) \sin \beta_5 + (Y_{33} + Y'_{33}) \cos \beta_5 - P_x \sin \varphi + P_y \cos \varphi = 0; \\ I_1 \dot{\omega}_1 = X_{31}(n_3 - b_1 \sin \beta_3) - X'_{31}(n_3 + b_1 \sin \beta_3) - (Y_{31} + Y'_{31})b_1 \cos \beta_3 + \\ + X_{32}(n_4 - b_2 \sin \beta_4) - X'_{32}(n_4 + b_2 \sin \beta_4) - (Y_{32} + Y'_{32})b_2 \cos \beta_4 + \\ + X_{33}(n_5 - b_3 \sin \beta_5) - X'_{33}(n_5 + b_3 \sin \beta_5) - (Y_{33} + Y'_{33})b_3 \cos \beta_5 - \\ - (P_x \sin \varphi + P_y \cos \varphi)a_1 - M_{c2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Окремі змінні у системах рівнянь (1) та (2) визначені у такий спосіб:

Поздовжня і бічна проекції швидкості центра мас автомобіля-тягача та його абсолютна кутова швидкість:

$$\begin{aligned} v = \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta; \\ u = -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta; \\ \omega = \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Швидкість центра мас напівпричепа, поздовжня і бічна проекції швидкості центра мас

напівпричепа, його абсолютна кутова швидкість та кутове прискорення:

$$\begin{aligned} v_{c1} = \dot{x}_1 v_1 + \dot{y}_1 u_1; \\ v_1 = \dot{x}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{y}_1 \sin \vartheta_1; \\ u_1 = -\dot{x}_1 \sin \vartheta_1 + \dot{y}_1 \cos \vartheta_1; \\ \omega_1 = \dot{\vartheta}_1 = \omega - \dot{\varphi}; \\ \dot{\omega}_1 = \dot{\omega} - \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Виразимо швидкість точки зчипки ланок автопоїзда відносно автомобіля-тягача та напівпричепа, отримаємо:

$$\begin{aligned}
v_O &= v_c + \omega \cdot CO_1 = i_0 v + j_0 (u - \omega c) = \\
&= i_1 [v \cos \varphi - (u - \omega c) \sin \varphi] + j_1 [v \sin \varphi + (u - \omega c) \cos \varphi]; \\
v_{O1} &= v_{c1} + \omega_1 \cdot C_1 O_1 = i_1 v_1 + j_1 (u_1 - \omega_1 a_1),
\end{aligned}$$

тоді поздовжню і бічну проекції швидкості центра мас напівпричепа можемо записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
v_1 &= v \cos \varphi - (u - \omega c) \sin \varphi; \\
u_1 &= v \sin \varphi + (u - \omega c) \cos \varphi - \omega_1 a_1.
\end{aligned} \quad (5)$$

Для напівпричепа:

$$\begin{aligned}
x_{O1} &= x - c \cos \vartheta; & x_{C1} &= x_{O1} - a_1 \cos(\vartheta - \varphi); & x_{B22} &= x_{O1} - L_2 \cos(\vartheta - \varphi); \\
y_{O1} &= y - c \sin \vartheta; & y_{C1} &= y_{O1} - a_1 \sin(\vartheta - \varphi); & y_{B22} &= y_{O1} - L_2 \sin(\vartheta - \varphi).
\end{aligned} \quad (7)$$

Сили взаємодії між автомобілем-тягачем та напівприцепом у горизонтальній площині визначимо із рівнянь:

$$\begin{aligned}
P_x &= -m_1 [\dot{v} - \omega u - \dot{\omega}_1 a_1 \sin \varphi + \omega^2 c + \omega_1^2 a_1 \cos \varphi] - \\
&- (X_{31} + X'_{31}) (\cos(\beta_3 - \varphi)) + (Y_{31} + Y'_{31}) (\sin(\beta_3 + \varphi)) - \\
&- (X_{32} + X'_{32}) (\cos(\beta_4 - \varphi)) + (Y_{32} + Y'_{32}) (\sin(\beta_4 + \varphi)) - \\
&- (X_{33} + X'_{33}) (\cos(\beta_5 - \varphi)) + (Y_{33} + Y'_{33}) (\sin(\beta_5 + \varphi));
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
P_y &= m_1 [\dot{u} - \omega v - \dot{\omega}_1 a_1 \cos \varphi - \dot{\omega} c - \omega_1^2 a_1 \cos \varphi] - \\
&- (X_{31} + X'_{31}) (\sin(\beta_3 + \varphi)) - (Y_{31} + Y'_{31}) (\cos(\beta_3 - \varphi)) - \\
&- (X_{32} + X'_{32}) (\sin(\beta_4 + \varphi)) + (Y_{32} + Y'_{32}) (\cos(\beta_4 - \varphi)) - \\
&- (X_{33} + X'_{33}) (\sin(\beta_5 + \varphi)) + (Y_{33} + Y'_{33}) (\cos(\beta_5 - \varphi)).
\end{aligned} \quad (9)$$

На основі спільного вирішення рівнянь (8), (9) та системи рівнянь (1), (2), на основі ряду перетворень, та з урахуванням (3), (5), (6), (7), отримаємо систему диференціальних рівнянь, що описують рух ланок дволанкового сидельного автопоїзда у гальмівному режимі, з урахуванням

Координати характерних точок автопоїзда (рис. 1) визначимо із рівнянь:

Для автомобіля-тягача:

$$\begin{aligned}
x_A &= x + a \cos \vartheta; & x_{B1} &= x - b \cos \vartheta; \\
y_A &= y + a \sin \vartheta; & y_{B1} &= y - b \sin \vartheta.
\end{aligned} \quad (6)$$

кутів встановлення осей причіпної ланки. Для отримання можливості оцінки впливу регулювання гальмівних сил по осях та боргах транспортного засобу в процесі проведення обчислень, додатково введемо в рівняння коефіцієнти нерівномірності k_{pi} гальмівних сил. Отримаємо рівняння:

- по змінній v

$$\begin{aligned}
e1 &= -(m + m_1) \dot{v} + m_1 a_1 \dot{\omega} \sin \varphi - m_1 a_1 \ddot{\omega} \sin \varphi + (m + m_1) \omega u - \\
&- m_1 \omega^2 (c + a_1 \cos \varphi) - m_1 a_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 2m_1 a_1 \omega \dot{\varphi} \cos \varphi - \\
&- X_1 k_{p1} \cos \theta - X'_1 k'_{p1} \cos \theta' - Y_1 \sin \theta - Y'_1 \sin \theta' - (X_2 k_{p2} + X'_2 k'_{p2}) \cos \beta_2 - \\
&- (Y_2 + Y'_2) \sin \beta_2 - X_{31} k_{p3} \cos(\beta_3 - \varphi) - X'_{31} k'_{p3} \cos(\beta_3 - \varphi) + \\
&+ Y_{31} \sin(\beta_3 + \varphi) + Y'_{31} \sin(\beta_3 + \varphi) - X_{32} k_{p4} \cos(\beta_4 - \varphi) - \\
&- X'_{32} k'_{p4} \cos(\beta_4 - \varphi) + Y_{32} \sin(\beta_4 + \varphi) + Y'_{32} \sin(\beta_4 + \varphi) - \\
&- X_{33} k_{p5} \cos(\beta_5 - \varphi) - X'_{33} k'_{p5} \cos(\beta_5 - \varphi) + Y_{33} \sin(\beta_5 + \varphi) + Y'_{33} \sin(\beta_5 + \varphi);
\end{aligned}$$

- по змінній u

$$\begin{aligned}
e2 &= -(m + m_1) \dot{u} + m_1 \dot{\omega} (c + a_1 \cos \varphi) - m_1 a_1 \ddot{\omega} \cos \varphi - (m + m_1) \omega v + \\
&+ m_1 a_1 \omega^2 \sin \varphi + m_1 a_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 2m_1 a_1 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi + Y_1 \cos \theta + Y'_1 \cos \theta' - \\
&- X_1 k_{p1} \sin \theta - X'_1 k'_{p1} \sin \theta' - (X_2 k_{p2} + X'_2 k'_{p2}) \sin \beta_2 + (Y_2 + Y'_2) \cos \beta_2 - \\
&- X_{31} k_{p3} \sin(\beta_3 - \varphi) - X'_{31} k'_{p3} \sin(\beta_3 - \varphi) - Y_{31} \cos(\beta_3 - \varphi) - Y'_{31} \cos(\beta_3 - \varphi) - \\
&- X_{32} k_{p4} \sin(\beta_4 + \varphi) - X'_{32} k'_{p4} \sin(\beta_4 + \varphi) - Y_{32} \cos(\beta_4 - \varphi) - Y'_{32} \cos(\beta_4 - \varphi) - \\
&- X_{33} k_{p5} \sin(\beta_5 + \varphi) - X'_{33} k'_{p5} \sin(\beta_5 + \varphi) - Y_{33} \cos(\beta_5 - \varphi) - Y'_{33} \cos(\beta_5 - \varphi);
\end{aligned}$$

- по змінній ω

$$\begin{aligned}
 e3 = & -[I + m_1 c(c + a_1 \cos \varphi)]\dot{\omega} + m_1 c\dot{u} - m_1 c a_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_1 c v \omega - m_1 c a_1 \omega^2 \sin \varphi - \\
 & - m_1 c a_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 2 m_1 c a_1 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi + (-X_1 k_{p1} \sin \theta + Y_1 \cos \theta)(a - p \sin \theta) + \\
 & + (-X'_1 k'_{p1} \sin \theta' + Y'_1 \cos \theta')(a + p \sin \theta') + (X_1 k_{p1} \cos \theta + Y_1 \sin \theta)(n_1 + p \cos \theta) - \\
 & - (X'_1 k'_{p1} \cos \theta' + Y'_1 \sin \theta')(n_1 + p \cos \theta') - X_2 k_{p2}(n_2 - b \sin \beta_2) - X'_2 k'_{p2}(n_2 + b \sin \beta_2) - \\
 & - (Y_2 + Y'_2) b \cos \beta_2 - M_{c1} - c(X_{31} k_{p3} + X'_{31} k'_{p3})(\sin(\beta_3 + \varphi)) - c(Y_{31} + Y'_{31}) \times \\
 & \times (\cos(\beta_3 - \varphi)) - c(X_{32} k_{p4} + X'_{32} k'_{p4})(\sin(\beta_4 + \varphi)) - c(Y_{32} + Y'_{32})(\cos(\beta_4 - \varphi)) - \\
 & - c(X_{33} k_{p5} + X'_{33} k'_{p5})(\sin(\beta_5 + \varphi)) - c(Y_{33} + Y'_{33})(\cos(\beta_5 - \varphi));
 \end{aligned}$$

- по змінній φ

$$\begin{aligned}
 e4 = & (I_1 + m_1 a_1^2)\ddot{\varphi} - [I_1 + m_1 a_1(a_1 + c \cos \varphi)]\dot{\omega} + m_1 a_1 \dot{v} \sin \varphi - m_1 a_1 \dot{u} \cos \varphi + \\
 & + m_1 a_1 \omega v \cos \varphi + m_1 a_1 \omega u \sin \varphi - m_1 c a_1 \omega^2 \sin \varphi - \\
 & - (X_{31} k_{p3} + X'_{31} k'_{p3})(\cos(\beta_3 - \varphi))(a_1 \sin \varphi) + (Y_{31} + Y'_{31})(\sin(\beta_3 + \varphi))(a_1 \sin \varphi) - \\
 & - (X_{32} k_{p4} + X'_{32} k'_{p4})(\cos(\beta_4 - \varphi))(a_1 \sin \varphi) + (Y_{32} + Y'_{32})(\sin(\beta_4 + \varphi))(a_1 \sin \varphi) - \\
 & - (X_{33} k_{p5} + X'_{33} k'_{p5})(\cos(\beta_5 - \varphi))(a_1 \sin \varphi) + (Y_{33} + Y'_{33})(\sin(\beta_5 + \varphi))(a_1 \sin \varphi) - \\
 & - (X_{31} k_{p3} + X'_{31} k'_{p3})(\sin(\beta_3 + \varphi))(a_1 \cos \varphi) - (Y_{31} + Y'_{31})(\cos(\beta_3 - \varphi))(a_1 \cos \varphi) - (10) \\
 & - (X_{32} k_{p4} + X'_{32} k'_{p4})(\sin(\beta_4 + \varphi))(a_1 \cos \varphi) - (Y_{32} + Y'_{32})(\cos(\beta_4 - \varphi))(a_1 \cos \varphi) - \\
 & - (X_{33} k_{p5} + X'_{33} k'_{p5})(\sin(\beta_5 + \varphi))(a_1 \cos \varphi) - (Y_{33} + Y'_{33})(\cos(\beta_5 - \varphi))(a_1 \cos \varphi) + \\
 & + X_{31} k_{p3}(n_3 - b_1 \sin \beta_3) - X'_{31} k'_{p3}(n_3 + b_1 \sin \beta_3) - (Y_{31} + Y'_{31}) b_1 \cos \beta_3 + \\
 & + X_{32} k_{p4}(n_4 - b_2 \sin \beta_4) - X'_{32} k'_{p4}(n_4 + b_2 \sin \beta_4) - (Y_{32} + Y'_{32}) b_2 \cos \beta_4 + \\
 & + X_{33} k_{p5}(n_5 - b_3 \sin \beta_5) - X'_{33} k'_{p5}(n_5 + b_3 \sin \beta_5) - (Y_{33} + Y'_{33}) b_3 \cos \beta_5 - M_{c2}.
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (10) охоплює поздовжні та бічні реакції дороги на колеса осей автопоїзда. Напрямок та характер поздовжніх реакцій $X_{\alpha\beta}$ відповідають гальмівному режиму. Значний вплив на величину та напрям бічних реакцій $Y_{\alpha\beta}$ має

прийнята модель деформації пневматичного колеса в бічному напрямку. За аналогією із [13] для опису взаємодії колеса з опорною поверхнею використаємо теорію нелінійного відведення Д. А. Антонова:

$$Y = q k_{yoe} \delta = k_T k_{yoe} \delta, \quad k_T = q_N q_\mu q_T = k_o q_T, \quad q_T = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{X}{\varphi Z}\right)^2}}{1 + 0,375 \frac{X}{Z}}, \quad (11)$$

де k_{yoe} – екстремальне значення коефіцієнта опору відведення k_{yo} (при $\delta = 0$) залежно від величини вертикального навантаження на колесо $k_{yo} = f(Z)$; q – коефіцієнт корекції зв'язку між бічною силою і кутом відведення; k_T – коефіцієнт, що враховує зміну коефіцієнта опору відведенню залежно від гальмівної сили, що діє на колесо; q_N – коефіцієнт, що враховує зміну коефіцієнта k_T залежно від величини нормальної реакції опорної поверхні на колесо; q_μ – коефіцієнт, що враховує зміну коефіцієнта k_T залежно від коефіцієнта зчеплення колеса з опорною поверхнею; Z – нормальна реакція опорної поверхні на колеса автопоїзда; X – гальмівна сила на колесах осей автопоїзда.

За аналогією з [14] приведені кути бічного відведення осей автопоїзда визначимо із рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\theta - \delta_1) &= \frac{(v_A)_{y0}}{(v_A)_{x0}} = \frac{u + \omega a}{v}; \\
 \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{-(v_{B1})_{y0}}{(v_{B1})_{x0}} = \frac{-u + \omega b}{v}; \\
 \operatorname{tg} \delta_3 &= \frac{-(v_{B21})_{y1}}{(v_{B21})_{x1}} = \frac{-u_1 + \omega_1 b_1}{v_1}; \\
 \operatorname{tg} \delta_4 &= \frac{-(v_{B22})_{y1}}{(v_{B22})_{x1}} = \frac{-u_1 + \omega_1 b_2}{v_1}; \\
 \operatorname{tg} \delta_5 &= \frac{-(v_{B23})_{y1}}{(v_{B23})_{x1}} = \frac{-u_1 + \omega_1 b_3}{v_1}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Звідси отримаємо рівняння для визначення кутів відведення коліс автомобіля-тягача:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \theta - \operatorname{arctg} \left[\frac{u + \omega(a - p \sin \theta) - \dot{\theta} p \sin \theta}{v - \omega(n_1 + p \cos \theta) - \dot{\theta} p \cos \theta} \right]; \\
 \delta'_1 &= \theta' - \operatorname{arctg} \left[\frac{u + \omega(a - p \sin \theta') - \dot{\theta}' p \sin \theta'}{v - \omega(n_1 + p \cos \theta') - \dot{\theta}' p \cos \theta'} \right]; \\
 \delta_2 &= -\beta_2 - \operatorname{arctg} \left[\frac{u - \omega(b - n_2 \sin \beta_2) - \dot{\beta}_2 n_2 \sin \beta_2}{v - \omega n_2 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 n_2 \cos \beta_2} \right]; \\
 \delta'_2 &= -\beta_2 - \operatorname{arctg} \left[\frac{u - \omega(b - n'_2 \sin \beta_2) - \dot{\beta}'_2 n'_2 \sin \beta_2}{v - \omega n'_2 \cos \beta_2 - \dot{\beta}'_2 n'_2 \cos \beta_2} \right].
 \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння для визначення кутів відведення коліс осей напівпричепа відповідно матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= -\beta_3 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_1 - n_3 \sin \beta_3) - \beta_3 n_3 \sin \beta_3}{v_1 - \omega_1 n_3 \cos \beta_3 - \beta_3 n_3 \cos \beta_3} \right]; \\ \delta'_3 &= -\beta_3 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_1 - n'_3 \sin \beta_3) - \beta_3 n'_3 \sin \beta_3}{v_1 - \omega_1 n'_3 \cos \beta_3 - \beta_3 n'_3 \cos \beta_3} \right]; \\ \delta_4 &= -\beta_4 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_2 - n_4 \sin \beta_4) - \beta_4 n_4 \sin \beta_4}{v_1 - \omega_1 n_4 \cos \beta_4 - \beta_4 n_4 \cos \beta_4} \right]; \\ \delta'_4 &= -\beta_4 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_2 - n'_4 \sin \beta_4) - \beta_4 n'_4 \sin \beta_4}{v_1 - \omega_1 n'_4 \cos \beta_4 - \beta_4 n'_4 \cos \beta_4} \right]; \\ \delta_5 &= -\beta_5 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_3 - n_5 \sin \beta_5) - \beta_5 n_5 \sin \beta_5}{v_1 - \omega_1 n_5 \cos \beta_5 - \beta_5 n_5 \cos \beta_5} \right]; \\ \delta'_5 &= -\beta_5 - \arctg \left[\frac{u_1 - \omega_1(b_3 - n'_5 \sin \beta_5) - \beta_5 n'_5 \sin \beta_5}{v_1 - \omega_1 n'_5 \cos \beta_5 - \beta_5 n'_5 \cos \beta_5} \right].\end{aligned}\tag{14}$$

Рівняння (13) та (14), з урахуванням (11), використаємо для розв'язку системи рівнянь (10) у процесі чисельних досліджень.

Висновки. На основі проведеного дослідження отримано математичну модель, яка описує рух дволанкових сидельних автопоїздів на гальмівних режимах. Розроблена модель дозволяє враховувати вплив кутів розміщення осей причіпної ланки, а також характер розподілу гальмівних сил як по осях, так і по бортах причіпної ланки на процес гальмування автопоїздів. За допомогою методу перетинів розроблено системи диференціальних рівнянь, що дозволяють описати дволанкові сидельні автопоїзди на гальмівних режимах у горизонтальній площині. Визначено рівняння для розрахунку кутів відведення коліс автопоїзда та рівняння для визначення кінематичних параметрів, необхідних для проведення чисельних досліджень.

Бібліографічний список

1. Вплив конструктивних і експлуатаційних факторів на стійкість руху автопоїзда з причепом категорії O1 / Сахно В. П., Шарай С. М., Мурований І. С. [та ін.]. *Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки: зб. наук. пр.* Кропивницький: ЦНТУ, 2022. Вип. 5 (36). Ч. 1. С. 244–255.
2. Експлуатаційна надійність і роботоздатність вантажного автомобільного рухомого складу. *Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки: зб. наук. пр.* / Розум Р. І., Буряк М. В., Прогній П. Б. [та ін.]. Кропивницький: ЦНТУ, 2022. Вип. 5 (36). Ч. 2. С. 201–205.
3. Клім В. В., Розум М. І., Верес В. П., Калищук О. Р., Розум Р. І. Технічне обслуговування та ремонт автотранспортних засобів по технічному стану з проведенням контролю параметрів механізмів. *Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції "Підвищення надійності і ефективності машин, процесів і систем"*, 17–19 квітня 2024 р. Кропивницький: ЦНТУ, 2024. С. 125–127.
4. Кравченко А. П. Статистичні дослідження порушень роботоздатності причепного складу автопоїздів європейського виробництва. *Вісник Східноукраїнського національного університету: науковий журнал.* 2006.

№ 7. Луганськ: СНУ ім. Даля, 2006. С. 87–91.

5. Оцінка довговічності металоконструкцій автотранспортних засобів / Буряк М. В., Розум Р. І., Захарчук О. П. та ін. *Вісник машинобудування та транспорту.* 2022. № 15, 1. С. 11–16.

6. Оцінка міцності та надійності автотранспортних засобів / Буряк М. В., Розум Р. І., Фалович Н. М. та ін. *Вісник машинобудування та транспорту.* 2022. № 15 (1) (Лип 2022). С. 17–22.

7. Пошукове конструювання колісних транспортних засобів / Попович П. В., Шевчук О. С., Дзядичевич Ю. В. та ін. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті.* ЛНТУ. Луцьк, 2021. С. 54–65.

8. Прогній П. Б. До аналізу стійкості автопоїзда у гальмівному режимі. *Вісник Національного транспортного університету.* 2013. Вип. 27. С. 299–306.

9. Прогній П. Б. Поліпшення стійкості автомобільного поїзда у гальмівному режимі: дис. ... канд. техн. наук : 05.22.02. Київ, 2016. 176 с.

10. Сахно В. П., Поляков В. М., Тімков О. М., Файчук М. І., Ковальчук Г. О. Вплив перекоосу мостів причіпних ланок на показники експлуатаційних властивостей автопоїзда. *Автошляховик України: науково-виробничий журнал.* 2015. № 3 (245). С. 5–10.

11. Сахно В. П., Кузнецов Р. М., Стельмашук В. В., Козачук Л. С. До визначення показників стійкості автопоїзда категорії M1 у перехідних режимах руху. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті: наук. журнал.* 2014. № 2. Луцьк: Луцький НТУ, 2014. С. 123–128.

12. Сахно В. П., Стельмашук В. В., Пазін Р. В. Визначення параметрів стійкості автопоїзда з причепом категорії O2. *Systemy i srodki transportu samochodowego. Wybrane zagadnienia. Monografia nrx, Seria: Transport.* Rzeszow, 2018. С. 93–102.

13. Сахно В., Прогній П. Рівняння руху автопоїзда у горизонтальній площині в гальмівному режимі. *Systemy i srodki transportu samochodowego. Wybrane Zagadnienia. Systems and means of motor transport. Selected problems.* Monografia nr 6. Seria: Transport. Rzeszow, 2015. С. 119–127.

14. Gim G., Nikraves P. E. An analytic model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulations. Part 1: Pure slips 1990. No 6, vol. 11. P. 589–618.

Стаття надійшла 24.01.2025