

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ПІД ДІЄЮ ФРИКЦІЙНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Віктор Семерак¹, к. т. н., Михайло Семерак², к. т. н.

¹ *Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, Дубляни, Львівський район, Львівська область, Україна,
e-mail: semerakvictor@gmail.com*

² *Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. Митрополита Андрія, 5, Львів, Україна*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.172-178>

Семерак В., Семерак М. Математичне моделювання термопружного стану ізотропного півпростору під дією фрикційного джерела тепла

У статті розглянуто задачу аналітичного дослідження термопружного стану ізотропного півпростору за умов дії фрикційного джерела тепла на його граничній поверхні. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення точності оцінювання напружено-деформованого стану елементів машин і конструкцій, що працюють в умовах інтенсивного контактного тертя та значних теплових навантажень, зокрема в гальмівних системах, підшипникових вузлах і фрикційних з'єднаннях. Нерівномірний розподіл температури, зумовлений фрикційним нагріванням, призводить до виникнення значних температурних градієнтів і складного термонапруженого стану в приповерхневих шарах матеріалу.

Аналітично визначено компонент тензора температурних напружень в ізотропному півпросторі з урахуванням умов термоконтакту та оцінено вплив параметра шорсткості на рівень еквівалентних напружень. Дослідження виконано в межах класичної теорії термопружності за припущення відсутності масових сил, внутрішніх джерел тепла та зовнішніх механічних навантажень. Осесиметричний напружено-деформований стан описано із застосуванням термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Лява.

Для розв'язання сформульованої крайової задачі використано інтегральні перетворення Ганкеля та Лапласа, що дало змогу отримати аналітичні вирази для компонент тензора температурних напружень і забезпечити точне виконання граничних умов на поверхні півпростору. Уведено безрозмірний термоконтактний параметр, який характеризує умови теплообміну та шорсткість контактної поверхні. Показано, що цей параметр істотно впливає на розподіл і рівень термонапружень у приповерхневій зоні.

Для кількісної оцінки інтенсивності термонапруженого стану застосовано енергетичний критерій Губера–Мізеса–Генкі. Проведено чисельний аналіз отриманих аналітичних залежностей, результати якого подано у вигляді графіків розподілу еквівалентних напружень уздовж глибини півпростору. Встановлено, що зі збільшенням параметра шорсткості загальний рівень термонапружень зменшується, проте в зоні контакту зберігається локальний максимум еквівалентних напружень.

Наукова новизна роботи полягає в аналітичному врахуванні термоконтактного критерію при дослідженні термопружного стану ізотропного півпростору. Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості їх використання для інженерної оцінки міцності та довговічності теплонавантажених елементів тертя.

Ключові слова: термопружність, ізотропний півпростір, фрикційне нагрівання, функція напружень Лява, термоконтактний критерій, еквівалентні напруження.

Semerak V., Semerak M. Mathematical modeling of the thermoelastic state of an isotropic half-space under the influence of a frictional heat source

This paper presents an analytical study of the thermoelastic state of an isotropic half-space subjected to a frictional heat source acting on its boundary surface. The relevance of this research stems from the need to enhance the accuracy of stress-strain assessments for machine components and structural elements that operate under intense frictional contact and substantial thermal loads. Examples include braking systems, bearing units, and frictional assemblies. The nonuniform temperature distribution caused by frictional heating leads to high thermal gradients and the formation of a complex thermoelastic stress state in the near-surface region of the material.

The aim of the study is to derive analytical expressions for the components of the thermal stress tensor in an isotropic half-space, while taking into account thermocontact conditions. Additionally, it analyzes the influence of surface roughness on the level of equivalent stresses. The investigation is conducted within the framework of classical thermoelasticity, based on the assumptions of no body forces, internal heat sources, or external mechanical loads. The axisymmetric thermoelastic state is described using the thermoelastic displacement potential and the Lamé stress function.

To solve the formulated boundary-value problem, Hankel and Laplace integral transforms are employed. This approach enables the derivation of closed-form analytical expressions for the thermal stress components and ensures that the boundary conditions on the half-space surface are satisfied exactly. A dimensionless thermocontact parameter is introduced to characterize the thermal contact conditions and surface roughness at the friction interface. It is demonstrated that this parameter significantly affects the distribution and magnitude of thermal stresses in the near-surface zone.

To quantitatively assess the intensity of the thermoelastic state, the Huber-Mises-Hencky energy criterion is utilized. Numerical analysis of the obtained analytical solutions is conducted, and the results are presented as graphical representations of equivalent stresses along the depth of the half-space. The analysis reveals that an increase in the surface roughness parameter leads to a decrease in the overall level of thermal stresses. However, a local maximum of equivalent stress persists at the friction surface.

The scientific novelty of this work lies in the analytical integration of the thermocontact criterion into the study of the thermoelastic state of an isotropic half-space. The practical significance of the results lies in their applicability to the engineering analysis and design of thermally loaded friction components, thereby enhancing their strength and durability.

Keywords: thermoelasticity, isotropic half-space, frictional heating, Lamé stress function, thermocontact criterion, equivalent stress.

Постановка проблеми. У процесі роботи машин і механізмів, що містять контактні вузли тертя (гальмівні системи, підшипникові опори, муфти зчеплення тощо), на поверхнях дотику виникають інтенсивні теплові потоки. Нерівномірний розподіл температури, спричинений фрикційним нагріванням, призводить до виникнення складного термонапруженого стану в приповерхневих шарах матеріалу. Перевищення допустимих термонапружень може викликати появу мікротріщин, залишкових деформацій і передчасне руйнування елементів тертя.

Наявні аналітичні та числові моделі термопружності, як правило, не враховують впливу параметра термоконтакту, що характеризує шорсткість і теплопровідність поверхонь дотику, а також не описують залежність еквівалентних напружень від умов теплообміну між тілами. Тому актуальною є побудова аналітичної моделі термопружного стану ізотропного півпростору, на поверхні якого діє фрикційне джерело тепла з урахуванням термоконтактного критерію. Такий підхід дає змогу більш точно оцінити напружено-деформований стан у приповерхневій зоні та визначити ділянки потенційного руйнування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми термопружного стану тіл під дією локалізованих теплових джерел досліджували в багатьох класичних працях з термопружності та термомеханіки. Основи побудови математичних моделей нестационарних температурних полів і відповідних напружень закладено у працях Б'янки, Біота [5], Гудмана [7], а також у монографіях Б. А. Білецького [1], О. О. Ільюшина [2] та Я. М. Тарновського [13]. Для півпростору з локальним або рухомим джерелом тепла розвинуто аналітичні методи, що базуються на інтегральних перетвореннях Фур'є, Ганкеля та Лапласа.

Значний внесок у розвиток теорії термопружності контактних систем зроблено у працях А. І. Тузова [15], А. А. Yevtushenko [16], С. К. Гуляєва [8], які розглянули вплив температурних градієнтів на напружено-деформований стан тіл обертання. Однак у більшості відомих моделей не враховано впливу параметра термоконтакту, який характеризує умови теплообміну між поверхнями тертя.

Окремі спроби урахування реальних умов термоконтакту здійснено в працях, присвячених аналізу процесів гальмування та зносу фрикційних пар (зокрема в роботах П. П. Панасюка та М. О. Мірошніченка [12]). Проте ці підходи здебільшого мають числовий характер і не дають аналітичних залежностей, придатних для швидкого інженерного аналізу.

Отже, недостатньо вивченим залишається питання аналітичного опису термонапруженого стану ізотропного півпростору з урахуванням термоконтактного критерію та осесиметричного характеру фрикційного нагрівання. Це визначає наукову новизну й актуальність дослідження.

Постановка завдання. Наше завдання – аналітичне визначення термонапруженого стану ізотропного півпростору, зумовленого дією фрикційного джерела тепла на його поверхні, з урахуванням нерівномірного розподілу температури та умов термоконтакту.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі основні завдання:

1. Побудувати математичну модель осесиметричного термопружного стану півпростору за відсутності масових сил, внутрішніх джерел тепла та зовнішніх механічних навантажень.

2. Використати рівняння термопружності для зв'язку температурного поля з потенціалом переміщень і функцією напружень Лява.

3. Застосувати інтегральні перетворення Ганкеля та Лапласа для отримання аналітичних розв'язків рівнянь термопружного стану при заданих граничних умовах.

4. Визначити компоненти тензора температурних напружень і дослідити їх залежність від безрозмірного термоконтактного параметра.

5. Провести аналіз розподілу еквівалентних напружень за критерієм Губера–Мізеса–Генкі та встановити вплив параметра шорсткості на рівень термонапруженого стану півпростору.

У результаті одержимо узагальнені аналітичні залежності, придатні для оцінки термопружних напружень у деталях і конструкціях, що працюють в умовах інтенсивного фрикційного нагріву.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо ізотропний півпростір, на поверхні якого діє фрикційне джерело тепла, що створює нерівномірний розподіл температури. У межах припущень теорії термопружності відсутні масові сили, внутрішні джерела тепла та зовнішні механічні навантаження. Гранична поверхня півпростору вважається вільною від дії напружень.

Приймаємо безрозмірну температуру T у вигляді [3; 17]:

$$T_{\beta}^*(\rho, Z, Fo) = \frac{T_{\beta}(r, z, t)}{T_{1/2, \max}^{\infty}} = \lambda_{\beta} \int_0^{\infty} \varphi_{\beta}(\xi) J_0(\xi \rho) \Phi(\xi, Z, Fo) d\xi, \quad (1)$$

де $\lambda_{\beta} = \frac{8(1+\beta)a_{1/2}}{3\pi a_{\beta}}$, r – радіальна складова ци-

ліндричної системи координат (r, z) з віссю z , направленою в середину сферичного сегмента; a_{β} – радіус ділянки контакту; β – параметр, що характеризує шорсткість поверхні.

Визначимо термонапружений стан півпростору, зумовлений нерівномірним розподілом температури (1), за відсутності масових сил, внутрішніх джерел тепла та зовнішніх навантажень, припускаючи, що його гранична поверхня $Z = 0$ вільною від напружень.

$$\sigma_{zz}^t = 0, \quad \sigma_{rz}^t = 0 \quad \text{при } Z = 0. \quad (2)$$

Осесиметричний напружено-деформований стан у шорсткому тілі, викликаний фрикційним тепловим джерелом на його граничній поверхні, описують через термопружний потенціал Ψ і функцію напружень Лява L [11]. Компоненти тензора температурних напружень представлені у

вигляді [10].

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij1}^t + \sigma_{ij2}^t, \quad (3)$$

де індекс «1» позначає напруження, отримані за допомогою термопружного потенціалу переміщень Ψ , тоді як індекс «2» відповідає напруженням, сформованим на основі функції Лява L .

У ізотропному тілі температурне поле T і термопружний потенціал переміщень Ψ пов'язані відповідним диференціальним рівнянням.

$$\nabla^2 \Psi = a_{\beta}^2 \beta_t T_{\beta}, \quad (4)$$

де $\beta_t = \alpha(1+\nu)/(1-\nu)$.

Відповідні температурні переміщення й напруження визначимо за формулами

$$u_{r1} = \frac{1}{a_{\beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \quad u_{z1} = \frac{1}{a_{\beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr1}^t = \frac{2\mu}{a_{\beta}^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \Delta \Psi \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta 1}^t = \frac{2\mu}{a_{\beta}^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \Delta \Psi \right), \quad (7)$$

$$\sigma_{zz1}^t = \frac{2\mu}{a_{\beta}^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} - \Delta^2 \Psi \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{rz1}^t = \frac{2\mu}{a_{\beta}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial Z}. \quad (9)$$

Розв'язок диференціального рівняння (4) для заданого розподілу температури (1) повинен задовольняти граничні умови, виражені через компоненти переміщень і напружень

$$\sigma_{zz1}^t = 0 \quad \text{при } Z = 0. \quad (10)$$

$$u_{r1} = 0 \quad \text{при } \rho = 0, \quad (11)$$

$$\{u_{r1}, u_{z1}\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho^2 + Z^2 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Граничні умови (10)-(12) перепишемо, використовуючи при цьому залежності (5)-(9)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} = 0 \quad \text{або } \Psi = 0 \quad \text{при } Z = 0. \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при } \rho = 0, \quad (14)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho^2 + Z^2 \rightarrow 0. \quad (15)$$

Застосування до рівняння (4) інтегральних перетворень Ганкеля та Лапласа і використання при цьому залежностей (13)-(15) дає

$$\frac{d^2 \bar{\bar{\Psi}}}{dZ^2} - \xi^2 \bar{\bar{\Psi}} = \beta_t a_{\beta}^2 \bar{\bar{T}}. \quad (16)$$

Трансформанти граничних умов (13), (15) будуть

$$\overline{\Psi} = 0 \text{ при } Z = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dZ} \rightarrow 0 \text{ при } Z \rightarrow 0. \quad (18)$$

Розв'язком рівняння (16) при граничних умовах (17), (18) є

$$\overline{\Psi}(\xi, z, s) = \frac{\Lambda_\beta \beta_t k \sqrt{b}}{s^2 \sqrt{s+b}} \varphi_\beta(\xi) \left[e^{-d\sqrt{s+b}} - e^{-\xi Z} \right], \quad (19)$$

де позначено: $b = \xi^2 k / a_\beta^2$, $d = a_\beta Z / \sqrt{k}$.

Після застосування до (19) формул обернення інтегральних перетворень Лапласа та Ганкеля отримаємо:

$$\Psi(r, z, Fo) = \Lambda_\beta \beta_t \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \Phi_1(\xi, Z, Fo) J_0(\xi \rho) d\xi. \quad (20)$$

Тут

$$\Phi_1(\xi, Z, Fo) = \left(Fo - \frac{1}{2\xi^2} \right) h^-(\xi, Z, Fo) - \frac{Z}{2\xi} h^+(\xi, Z, Fo) + \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} e^{-\left(\xi^2 Fo + \frac{Z^2}{4Fo} \right)}, \quad (21)$$

$$h^\pm(\xi, Z, Fo) = \frac{1}{2} \left[e^{-\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{Fo}} - \xi \sqrt{Fo} \right) \pm \pm e^{\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{Fo}} + \xi \sqrt{Fo} \right) \right]. \quad (22)$$

Напруження, що відповідають функції Ψ (20), знаходимо за формулами (6)-(9):

$$\sigma_{rr1}^t = C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \Phi_1(\xi, Z, Fo) \left[\frac{\xi}{\rho} J_1(\xi \rho) - \xi^2 J_0(\xi \rho) \right] d\xi - 2\mu \beta_t T_\beta, \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta 1}^t = -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \Phi_1(\xi, Z, Fo) \frac{\xi}{\rho} J_1(\xi \rho) d\xi - 2\mu \beta_t T_\beta, \quad (24)$$

$$\sigma_{zz1}^t = C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \Phi_1(\xi, Z, Fo) \xi^2 J_0(\xi \rho) d\xi, \quad (25)$$

$$\sigma_{rz1}^t = C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \Phi_2(\xi, Z, Fo) \xi^2 J_1(\xi \rho) d\xi, \quad (26)$$

де

$$\Phi_2(\xi, Z, Fo) = \frac{Z}{2\xi} h^-(\xi, Z, Fo) - Fo h^+(\xi, Z, Fo),$$

$$C_\beta = 2\mu \beta_t \Lambda_\beta. \quad (27)$$

Відповідно до співвідношень (25) і (26), на поверхні $Z = 0$ півпростору $\sigma_{zz1}(\rho, 0, t) \neq 0$, $\sigma_{rz1}(\rho, 0, t) \neq 0$ напруження не дорівнюють нулю, тобто поверхня півпростору не є вільною і граничні умови (2) не виконуються. У зв'язку з цим розглянемо додаткову задачу, яка враховує дію на поверхню півпростору розподіленого навантаження, що створює відповідні напруження.

$$\sigma_{zz1}^t + \sigma_{zz2}^t = 0, \quad \sigma_{rz1}^t + \sigma_{rz2}^t = 0 \text{ при } Z=0. \quad (28)$$

У разі осесиметричної деформації тіла ненульові компоненти тензора напружень визначаються такими співвідношеннями [9]:

$$\sigma_{rr2} = \frac{2\mu}{a_\beta^3(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\nu \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \right), \quad (29)$$

$$\sigma_{\theta\theta 2} = \frac{2\mu}{a_\beta^3(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\nu \Delta L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial L}{\partial \rho} \right), \quad (30)$$

$$\sigma_{zz2} = \frac{2\mu}{a_\beta^3(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(2-\nu) \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial Z^2} \right], \quad (31)$$

$$\sigma_{rz2} = \frac{2\mu}{a_\beta^3(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1-\nu) \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial Z^2} \right], \quad (32)$$

де функція Лява L є розв'язком бігармонійного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 L = 0. \quad (33)$$

Розв'язок диференціального рівняння (33), який залишається регулярним на нескінченності, можна подати у вигляді [14]:

$$L(r, z, t) = \int_0^\infty (A_1 + A_2 Z) e^{-\xi z} J_0(\xi \rho) d\xi. \quad (34)$$

Сталі інтегрування A_1 та A_2 визначають із граничних умов (28), де компоненти тензора напружень через співвідношення (31) і (32) виражаються за допомогою функції Лява, а значення σ_{zz1} і σ_{rz1} задаються відповідно формулами (25) та (26). У результаті отримуємо:

$$A_1 = \frac{2\nu-1}{\xi} A_2, \quad A_2 = \frac{2\nu-1}{2\mu} C_\beta a_\beta^3 \varphi_\beta(\xi) \Phi_2(\xi, 0, Fo).$$

Тоді вираз (34) можна подати так:

$$L(r, z, t) = \frac{2\nu-1}{2\mu} C_\beta a_\beta^3 \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) e^{-\xi z} \Phi_2(\xi, 0, Fo) \left(\frac{2\nu-1}{\xi} + Z \right) J_0(\xi \rho) d\xi. \quad (35)$$

Напруження, що відповідають функції L (35), знаходимо за формулами (29)-(32):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr2} = & -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 e^{-\xi Z} \left\{ [(1-\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2-\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) + \right. \\ & \left. + [(2\nu-1-\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu-2+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo)] \frac{J_1(\xi\rho)}{\xi\rho} \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta 2} = & -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 e^{-\xi Z} \left\{ 2\nu[\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) + \right. \\ & \left. + [(2\nu-1+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu-2+\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] \frac{J_1(\xi\rho)}{\rho} \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sigma_{zz2} = -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 e^{-\xi Z} [(1+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \xi Z\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) d\xi, \quad (38)$$

$$\sigma_{rz2} = -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 e^{-\xi Z} [-\xi Z\Phi_2(\xi, 0, Fo) + (1-\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_1(\xi\rho) d\xi. \quad (39)$$

Повне поле квазістатичних температурних напружень σ_{ij}^t визначається шляхом суперпозиції напружень (23)-(26), що відповідають термopруж-

ному потенціалу Ψ , та напружень (36)-(39), пов'язаних із функцією Лява L . Унаслідок цього отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^t = & C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \left\{ \Phi_1(\xi, Z, Fo) \left[\frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) - \xi^2 J_0(\xi\rho) \right] - \right. \\ & - \xi^2 e^{-\xi Z} \left\{ [(1-\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2-\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) + \right. \\ & \left. + [(2\nu-1-\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu-2+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo)] \frac{J_1(\xi\rho)}{\xi\rho} \right\} d\xi - 2\mu\beta_t T_\beta, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^t = & -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \left\{ \Phi_1(\xi, Z, Fo) \frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) + \xi^2 e^{-\xi Z} 2\nu[\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) + \right. \\ & \left. + \xi^2 e^{-\xi Z} [(2\nu-1+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu-2+\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] \frac{J_1(\xi\rho)}{\rho} \right\} d\xi - 2\mu\beta_t T_\beta, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\sigma_{zz}^t = C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 \left\{ \Phi_1(\xi, Z, Fo) - e^{-\xi Z} [(1+\xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \xi Z\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) \right\} d\xi, \quad (42)$$

$$\sigma_{rz}^t = -C_\beta \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) \xi^2 \left\{ \Phi_2(\xi, Z, Fo) + e^{-\xi Z} [\xi Z\Phi_1(\xi, 0, Fo) - (1-\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_1(\xi\rho) \right\} d\xi, \quad (43)$$

при цьому значення функцій Φ_1 і Φ_2 визначаються залежностями (21), (22) та (27) відповідно. Легко перевірити, підставивши їх у співвідношення (42) і

(43) $Z=0$, що граничні умови (28) виконуються тотожно.

Вирази (40)-(43) для температурних напружень можуть бути представлені у вигляді:

$$\sigma_{ij}^t = p_\beta w_i \sigma_{ij}^*, \quad \sigma_{ij}^* = \int_0^\infty \varphi_\beta(\xi) S_{ij}(\xi, \rho, Z, Fo) d\xi - T_{1\beta}^* \varepsilon_{ij}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} S_{rr}(\xi, \rho, Z, Fo) = & \Phi_1(\xi, Z, Fo) \left[\frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) - \xi^2 J_0(\xi\rho) \right] - \\ & - \xi^2 e^{-\xi Z} \left\{ [(1-\xi Z)\xi\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2-\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] J_0(\xi\rho) + \right. \\ & \left. + [(2\nu-1+\xi Z)\xi\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu-2+\xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] \frac{J_1(\xi\rho)}{\xi\rho} \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$S_{\theta\theta}(\xi, \rho, Z, Fo) = \Phi_1(\xi, Z, Fo) \frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) + \xi e^{-\xi Z} \left\{ [2\nu\xi\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \right.$$

$$+ 2\nu\Phi_2(\xi, 0, Fo)]J_0(\xi\rho) - [(2\nu - 1 + \xi Z)\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (2\nu - 2 + \xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)]\frac{J_1(\xi\rho)}{\xi\rho}, \quad (46)$$

$$S_{zz}(\xi, \rho, Z, Fo) = \left\{ \Phi_1(\xi, Z, Fo) - e^{-\xi Z} [(1 + \xi Z)\xi\Phi_1(\xi, 0, Fo) + \xi Z\Phi_2(\xi, 0, Fo)] \right\} \xi^2 J_0(\xi\rho), \quad (47)$$

$$S_{rz}(\xi, \rho, Z, Fo) = \left\{ -\Phi_2(\xi, Z, Fo) + e^{-\xi Z} [-\xi Z\Phi_1(\xi, 0, Fo) + (1 - \xi Z)\Phi_2(\xi, 0, Fo)] \right\} \xi^2 J_1(\xi\rho), \quad (48)$$

$$T_{1\beta}^* = T_{\beta}^* / \lambda_{\beta}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = r, i = j = \theta, \\ 0, & i = j = z, i = r, j = z. \end{cases} \quad (49)$$

Безрозмірний параметр w_t у співвідношенні (44) визначається як $w_t = C_{\beta} / p_{\beta}$, або відповідно до формул (27)

$$w_t = \frac{C_{\beta}}{p_{\beta}} = \frac{2\mu\alpha(1+\nu)\gamma fVa_{\beta}}{(1-\nu)K} \quad (50)$$

Параметр, відомий як «термоконтактний критерій» [6], відіграє ключову роль у розв'язанні термоконтактних задач і збігається з відповідним показником βa^2 , запропонованим Барбером [4]. Для оцінки рівня термонапруженого стану застосовують критерій питомої енергії деформації Губера–Мізеса–Генкі [10; 18], який ефективно описує граничну поведінку широкого класу пластичних матеріалів. Еквівалентне напруження за цією теорією визначається як функція безрозмірних компонент температурних напружень, що дозволяє кількісно оцінити інтенсивність термонапруженого стану в матеріалі.

$$I_{\beta} = p_{\beta} w_t I_{\beta}^*,$$

$$I_{\beta}^* = \left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{rr}^* - \sigma_{\theta\theta}^*)^2 + (\sigma_{\theta\theta}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + (\sigma_{zz}^* - \sigma_{rr}^*)^2] + (\sigma_{rz}^*)^2 \right\}^{1/2},$$

де безрозмірні компоненти напружень σ_{ij}^* даються співвідношенням (44)-(49).

Проведено чисельні розрахунки термонапруженого стану для заданих параметрів $\nu = 0,3$. Аналіз впливу шорсткості показав, що збільшення її значення знижує рівень термонапружень I_{β}^* у центрі нагрівальної ділянки, проте в усьому діапазоні значень спостерігається локальний максимум напружень за критерієм Губера–Мізеса (рис. 1). Розподіл еквівалентного напруження $I_{\beta, \max}^*$ за глибиною вздовж осі $\rho = 0$ показаний на рис. 2, причому максимальна інтенсивність термонапруженого стану досягається на поверхні тертя.

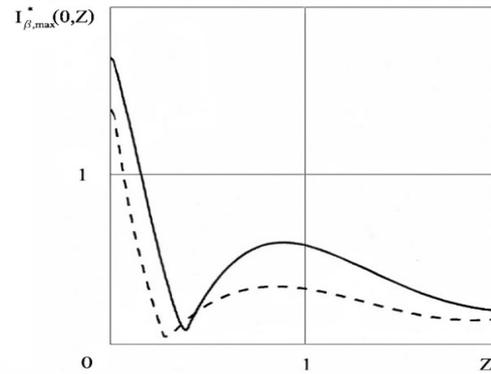


Рис. 1. Розподіл величини I_{β}^* в центрі ділянки нагрівання вздовж координати Z .

Fig. 1. Distribution of the value I_{β}^* in the center of the heating area along the Z coordinate

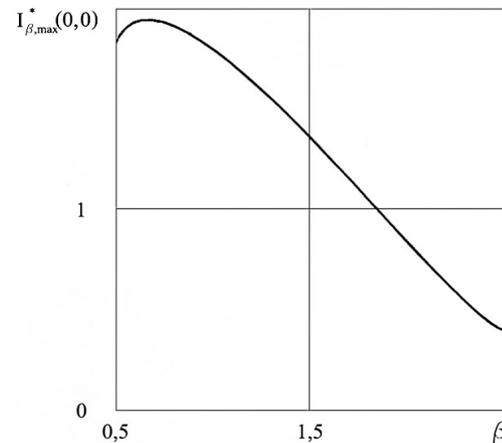


Рис. 2. Залежність величини $I_{\beta, \max}^*$ за глибиною від значення параметра шорсткості β , вздовж осі $\rho = 0$.

Fig. 2. Dependence of the depth value $I_{\beta, \max}^*$ on the value of the roughness parameter β along the axis $\rho = 0$.

Висновки

1. Побудовано аналітичну модель осесиметричного термопруженого стану ізотропного півпростору, на поверхні якого діє фрикційне джерело

тепла. Модель враховує нерівномірний розподіл температури та умови термодотакту.

2. На основі рівнянь термопружності з використанням інтегральних перетворень Ганкеля та Лапласа отримано аналітичні вирази для компонент тензора температурних напружень, що забезпечують виконання граничних умов на поверхні півпростору.

3. Запропоновано спосіб корекції граничних умов шляхом додавання розподіленого навантаження, яке компенсує залишкові поверхневі зусилля, що виникають у процесі фрикційного нагрівання.

4. Встановлено, що рівень термонапруженого стану суттєво залежить від безрозмірного термодотактного параметра, який визначає умови теплообміну на поверхні контакту.

5. Аналіз за критерієм Губера-Мізеса-Генкі показав, що зі збільшенням параметра шорсткості поверхні максимальні термонапруження зменшуються, але при цьому спостерігається локальний максимум еквівалентних напружень у центрі зони нагрівання.

6. Отримані залежності можна використати для аналітичної оцінки напружено-деформованого стану деталей машин і конструкцій, що працюють в умовах фрикційного нагріву, а також для розроблення рекомендацій щодо підвищення їх термостійкості та довговічності.

Бібліографічний список

1. Білецький Б. А. Основи термопружності. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2008. 312 с.
2. Ільющин О. О., Писаренко Г. С. Основи теорії пружності та пластичності. Київ: Наукова думка, 1982. 568 с.
3. Семерак В. М., Косарчин В. І. Термонапружений стан в околі локальної ділянки фрикційного контакту. *Вісник ЛНАУ: агроінженерні дослідження*. 2014. № 18. С. 271-275.
4. Barber J. R. Thermoelastic contact problems. *Journal of Applied Mechanics*. 1973. Vol. 40, No. 1. P. 222-228.
5. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*. 1956. Vol. 27. P. 240-253.
6. Boley B. A., Weiner J. H. *Theory of Thermal Stresses*. New York: John Wiley & Sons, 1960. 586 p.
7. Goodman L. E. Thermoelastic analysis of frictional heating problems. *Journal of Applied Mechanics*. 1960. Vol. 27, No. 2. P. 167-173.
8. Gulyayev S. K., Misiura V. V. Analytical models of thermal stresses in frictional contact systems. *Mechanics of Materials*. 2005. Vol. 37. P. 935-944.
9. Huber M. T. Specific work of strain as a measure of material damage. *Czasopismo Techniczne*. 1904. No. 22. P. 38-40.
10. Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Göttingen Nachrichten*. 1913. P. 582-592.
11. Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 540 p.
12. Panasyuk P. P., Miroshnychenko M. O. *Modeling of thermomechanical stresses in braking systems. Strength of Materials*. 2010. Vol. 42, No. 5. P. 541-549.
13. Tarnowski Ya. M. Thermoelastic problems of half-space with heat sources. Lviv: Lviv Polytechnic National University Press, 2014. 210 p.
14. Timoshenko S., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970. 567 p.
15. Tuzov A. I., Hutsulyak V. V. Thermoelastic state of isotropic half-space under nonuniform heating. *Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52, No. 3. P. 77-85.
16. Yevtushenko A. A., Kuciej M. Frictional Heating in Sliding Contact Problems. Cham: Springer, 2017. 410 p.
17. Yevtushenko A., Kuciej M., Topczewska K. Effect of the temporal profile of the friction power on temperature of a pad-disc brake system. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2019. Vol. 57, № 2.
18. Zenkour A. M. Thermoelastic responses in solids due to frictional heating using generalized theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. P. 2220-2233.

Стаття надійшла 11.02.2025