

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ В ЗОНІ ТЕРТЯ ШОРСТКИХ ПОВЕРХОНЬ

*Михайло Семерак<sup>1</sup>, д. т. н., Віктор Семерак<sup>2</sup>, к. т. н., Тарас Бубняк<sup>2</sup>, к. ф.-м. н.,  
Олексій Бурнаєв<sup>2</sup>, к. ф.-м. н., Олександр Пономаренко<sup>2</sup>, к. ф.-м. н., Оксана Говда<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> НУ «Львівська політехніка», вул. Митрополита Андрея, 5, Львів, Україна, 79013*

*<sup>2</sup> Львівський національний університет природокористування,*

*вул. Володимира Великого, 1, Дубляни, Львівський район, Львівська область, Україна*

*e-mail: semerakviktor@gmail.com*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.166-171>

### **Семерак М., Семерак В., Бубняк Т., Бурнаєв О., Пономаренко О., Говда О. Математичне моделювання процесів теплопередачі в зоні тертя шорстких поверхонь**

У статті виконано аналітичне дослідження нестационарних процесів теплопередачі в зоні тертя шорстких твердих тіл із круговою контурною площею контакту. Модель базується на об'єднанні рівняння теплопровідності півпростору та модифікованого закону контактної взаємодії, який враховує реальну мікрогеометрію поверхні через параметр шорсткості  $\beta$ . Показано, що значення  $\beta$  визначає розмір контурної ділянки контакту та впливає на фактичний розподіл контактного тиску, який у випадку шорстких поверхонь суттєво відрізняється від класичного герцівського рішення. Використано квазігерцівський розподіл тиску, що дозволило коректно описати збільшення реальної площі контакту при малих навантаженнях та підвищених значеннях шорсткості.

Для розв'язання нестационарної задачі застосовано інтегральні перетворення Ганкеля та Лапласа, що дало змогу отримати аналітичний вираз для температурного поля в будь-якій точці півпростору. На основі отриманих залежностей проведено числовий аналіз впливу параметра шорсткості  $\beta$ , форми контактного тиску та інтенсивності фрикційного тепловиділення на максимальну температуру й просторовий розподіл температур. Встановлено, що зі збільшенням  $\beta$  температура в центрі контактної зони зменшується внаслідок збільшення контурної площі та відповідного розподілу теплового потоку.

Отримані результати узгоджуються з відомими теоретичними та експериментальними даними інших авторів щодо впливу мікрогеометрії на фрикційне нагрівання. Запропонована модель може бути використана для оцінювання теплового стану вузлів тертя машин, зокрема дискових гальм, муфт зчеплення, підшипників ковзання та кочення. Модель підвищує точність прогнозування температурних максимумів, що є важливим для забезпечення надійності та довговічності трибологічних систем.

**Ключові слова:** фрикційне нагрівання, шорсткість поверхні, контурна площа контакту, теплопровідність, інтегральні перетворення, температурне поле, півпростір.

### **Semerak M., Semerak V., Bubniak T., Burnaiev O., Ponomarenko O., Hovda O. Mathematical modeling of heat transfer processes in the friction zone of rough surfaces**

The paper presents an analytical study of transient heat transfer processes occurring in the frictional contact zone of rough solid bodies with a circular contour contact area. The mathematical model combines the heat conduction equation for a half-space with a modified contact interaction law that accounts for the real micro-geometry of the surface through the roughness parameter  $\beta$ . It is shown that the value of  $\beta$  determines the size of the contour contact region and significantly affects the actual pressure distribution, which, for rough surfaces, differs markedly from the classical Hertz solution. A quasi-Hertzian pressure profile is employed to accurately describe the increase in real contact area under low loads and elevated roughness levels.

To solve the transient problem, the Hankel and Laplace integral transforms are applied, yielding an analytical expression for the temperature field at any point within the half-space. Based on the obtained formulas, a numerical analysis of the influence of the roughness parameter  $\beta$ , the pressure distribution, and the frictional heat flux on the peak temperature and its spatial distribution is conducted. It is established that an increase in  $\beta$  leads to a decrease in the maximum temperature in the contact center due to the enlargement of the contour contact area and the corresponding redistribution of thermal energy.

The results demonstrate good agreement with published analytical and experimental findings by other authors concerning the influence of surface micro-geometry on frictional heating. The proposed model can be applied to the thermal assessment of frictional components such as disc brakes, clutches, sliding and rolling bearings. The approach improves the accuracy of predicting temperature peaks, which is crucial for enhancing the reliability and durability of tribological systems.

**Keywords:** frictional heating, surface roughness, contour contact area, thermal conductivity, integral transformations, temperature field, half-space.

**Постановка проблеми.** У процесах тертя ковзання та кочення між контактуючими твердими тілами відбувається інтенсивне тепловиділення в зоні контакту. Це зумовлює локальне підвищення температури, яке, своєю чергою, впливає на зміну фізико-механічних властивостей матеріалів, інтенсивність зносу, виникнення термічних деформацій і можливі пошкодження поверхневих шарів. Точна оцінка температурного поля у зоні контакту є ключовою для прогнозування працездатності трибологічних вузлів, таких як гальмівні системи, муфти зчеплення, підшипники та інші елементи машин.

Класичні аналітичні моделі розрахунку температури у твердих тілах під дією фрикційного навантаження базуються на припущенні про ідеально гладкі поверхні та суцільну контактну площу. Однак у реальних умовах поверхні мають мікронерівності, які істотно змінюють характер розподілу теплового потоку та температурного поля. Ігнорування шорсткості може призвести до суттєвих похибок у визначенні максимальних температур і теплових напружень.

Отже, актуальним є розроблення аналітичних методів визначення нестационарного температурного поля у шорсткому півпросторі під дією кругового фрикційного джерела тепла з урахуванням реальної (контурної) площі контакту та модифікованого розподілу тиску.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Класична модель рухомого джерела тепла (Jaeger) [11] залишається базовою для опису локального нагріву при ковзанні: вона дає аналітичні вирази для температурних полів у півпросторі і дозволяє ввести безрозмірні параметри (наприклад Péclet), що керують формою профілю температури. Ці результати часто слугують нульовим наближенням у сучасних роботах.

Останні теоретичні праці розвивають рішення для рухомих або імпульсних джерел (стрічкові, кругові) і порівнюють аналітичні формули з чисельними розв'язками. Роботи типу Aderghal et al. [10] показують, коли аналітика (рухоме джерело) дає прийнятну точність, а коли необхідно застосовувати FEM/CFD для урахування тривимірних ефектів, охолодження поза зоною та об'ємного джерела тепла.

Сучасні дослідження контактної механіки показують, що реальна (контурна) площа контакту між шорсткою і гладкою поверхнями значно перевищує прогноз Герца, особливо при невеликих навантаженнях і високій шорсткості. Пояснення – множинні мікроасперитети, пластична деформація

та статистична природа поверхонь; це прямо впливає на розподіл тиску та локальну інтенсивність тепловиділення. Значна література останніх років підкреслює необхідність врахування реальної площі контакту у теплових задачах [6; 7].

Дослідження, що вводять квазігерцівські або еліптичні профілі тиску (замість ідеального герцівського), демонструють:

- контурна площа збільшується → локальні контактні зони більші;
- це призводить до зниження пік-температур при тій же питомій дисипації (енергії), бо теплове джерело розподілене на ширшу площу;
- ефект особливо помітний у слабонавантажених з'єднаннях (дискові гальма, муфти). Ці висновки підтверджують емпіричні спостереження і теоретичні моделі коригованого тиску. Сучасні публікації активно комбінують аналітику з чисельними методами:
  - FEM/CFD моделювання теплових полів у контакті з реалістичною геометрією;
  - швидкі чисельні інтегратори (QAGI, спеціалізовані процедури для функцій Бесселя) для обернених перетворень;
  - машинне навчання для прогнозу істинної контактної площі за топографією (нові роботи 2021-2025 рр.). Це дає змогу перевіряти аналітичні наближення і виводити поправки.

**Постановка завдання.** Метою дослідження є визначення нестационарного розподілу температури в півбезмежному тілі із шорсткою поверхнею, що перебуває у фрикційному контакті із гладкою поверхнею за умов ковзання зі сталою швидкістю. Для цього необхідно врахувати реальну геометрію контактної взаємодії, яка характерна хвилястістю поверхні, та вплив шорсткості на теплові процеси в зоні контакту [1-4].

Завдання зводиться до розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності в півпросторі з урахуванням граничних умов, що описують тепловий потік від фрикційного джерела змінної інтенсивності. При цьому розподіл контактного тиску моделюється квазігерцівським законом, який відображає вплив шорсткості поверхні на контурну ділянку контакту.

Необхідно отримати аналітичний вираз для температурного поля в довільній точці півпростору під час перехідних процесів, а також проаналізувати вплив параметра шорсткості та розподілу тиску на максимальні температури в зоні контакту.

**Виклад основного матеріалу.** Під час визначення розмірів контурної ділянки контакту

було враховано деформацію шорсткості поверхні шляхом використання розподілу контактної тиску, який відрізняється від класичного герцівського та має квазігерцівський характер, наближений до еліптичного закону розподілу.

$$p(r) = p_{\beta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a_{\beta}} \right)^2 \right]^{\beta}, \quad (1.1)$$

$$p_{\beta} = \frac{P(1+\beta)}{\pi a_{\beta}^2}, \quad r \leq a_{\beta}.$$

У співвідношенні (1.1)  $r$  – радіальна складова циліндричної системи координат  $(r, z)$  з віссю  $z$ , направленою в середину сферичного сегмента;  $a_{\beta}$  – радіус ділянки контакту;  $\beta$  – параметр, що характеризує шорсткість поверхні [15].

Радіус контурної ділянки контакту  $a_{\beta}$  визначається із співвідношень [3]

$$\frac{a_{\beta}}{a_{1/2}} = G(\beta), \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{\alpha},$$

де

$$G(\beta) = \sqrt[3]{\frac{8}{3\pi(1-\alpha\beta)} \{G_2(\beta) + \alpha\beta[G_3(\beta) - G_1(\beta)]\}},$$

$$G_1(\beta) = (1+\beta)B \left( 1 + \beta, \frac{1}{2} \right),$$

$$G_2(\beta) = \frac{1}{4}(1+\beta)(1+2\beta)B \left( 1 + \beta, \frac{1}{2} \right),$$

$$G_3(\beta) = \frac{1}{\pi}(1+\beta)B^2 \left( 1 + \beta, \frac{1}{2} \right),$$

$$\alpha = \frac{2}{2\omega + 1}, \quad \omega = 2 \text{ або } 3$$

(залежно від способу обробки поверхні [9]; параметр  $\omega$  – це безрозмірний коефіцієнт, який характеризує вплив шорсткості поверхні на реальну (контурну) площу контакту;  $\omega > 1$  – реальна площа контакту більша, ніж у гладких тіл (поверхня має мікронерівності з плоскими вершинами)). Параметр  $\beta$  є безрозмірною характеристикою шорсткості поверхні, що показує, у скільки разів реальний радіус контурної ділянки контакту перевищує герцівський радіус для ідеально гладких поверхонь. Типові значення  $\beta$  змінюються від 1 до 3 залежно від способу обробки:  $\beta \approx 1$  характерне для шліфованих і поліруваних поверхонь,  $\beta \approx 1.5-2$  – для токарної та фрезерної обробки,  $\beta \approx 2-3$  – для грубих, литих або зношених поверхонь.  $a_{1/2}$  – радіус ділянки контакту, розрахований при герцівському тиску.

Залежність  $a_{\beta}/a_{1/2}$  параметра від величини параметра  $\beta$  наведено на рис. 1. Із зменшенням навантаження та підвищенням класу шорсткості робочих поверхонь пари тертя значення  $a_{\beta}/a_{1/2}$  зростає. При цьому доцільно розрізняти два типи трибоз'єднань: плоскі та криволінійні. До першого типу, який відзначається великими значеннями  $\beta$ , належать, зокрема, фрикційні елементи дискових гальм і муфти зчеплення [14]. Як видно з графіків на рис. 1, використання формули Герца для визначення контурної площі контакту в цьому випадку призводить до істотних похибок. Другий тип трибоз'єднань – це підшипники ковзання та кочення, кулачкові механізми тощо. Для них характерні значно вищі контактні тиски (на 2-3 порядки більші, ніж у трибоз'єднаннях першого типу), що зумовлює відповідні значення параметра  $\beta \approx 0,5$ .

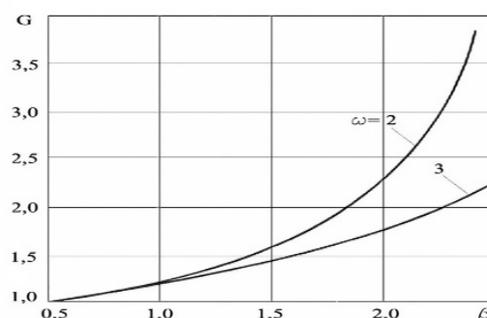


Рис. 1. Залежність  $a_{\beta}/a_{1/2}$  від величини параметра  $\beta$

Fig. 1. Dependence  $a_{\beta}/a_{1/2}$  on the value of the parameter  $\beta$

У процесі тертя на контактній площадці утворюється тепло, яке створює тепловий потік, спрямований на нагрів нерівностей поверхні [5; 8]. З урахуванням співвідношення (1.1), інтенсивність цього теплового потоку, що проходить через контурну зону контакту в сферу, визначається як

$$q(r) = \gamma f V p(r) H(a_{\beta} - r), \quad (1.2)$$

де  $p(r)$  – контактний тиск у зоні дотику  $0 \leq r \leq a_{\beta}$ , близький до розподілу Герца (1.1).

Нестаціонарний температурний розподіл  $T_{\beta}(r, z, t)$  у півбезмежному тілі із шорсткою поверхнею під дією теплового потоку (1.2) у будь-який момент часу визначається з розв'язку нестаціонарного рівняння теплопровідності, записаного в безрозмірних змінних  $\rho = r/a_{\beta}, Z = z/a_{\beta}$  у такій формі:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T_{\beta}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T_{\beta}}{\partial Z^2} = \frac{a_{\beta}^2}{k} \frac{\partial T_{\beta}}{\partial t},$$

$$\rho \geq 0, Z \geq 0, t > 0. \quad (1.3)$$

Розв'язок рівняння (2.3) повинен відповідати початковій умові

$$T_{\beta} = 0 \text{ при } t = 0 \quad (1.4)$$

і граничній умові

$$\frac{\partial T_{\beta}}{\partial Z} = \begin{cases} -\Lambda_{\beta} (1 - \rho^2)^{\beta}, & \rho \leq 1, Z = 0, t > 0, \\ 0, & \rho > 1, Z = 0, t > 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial T_{\beta}}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 0, 0 \leq Z < \infty, t > 0 \quad (1.6)$$

та умові регулярності

$$T_{\beta} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, Z \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

В умові (1.5) позначено

$$\Lambda_{\beta} = \gamma q_0 a_{\beta} / K; \quad q_0 = fVP_{\beta}.$$

Під час розв'язання крайової задачі (1.3)-(1.7) послідовно використовують інтегральне перетворення Ганкеля за радіальною координатою та перетворення Лапласа за часом:

$$\bar{T}_{\beta}(\xi, z, t) = \int_0^{\infty} \rho T_{\beta}(r, z, t) J_0(\xi \rho) d\rho \quad (1.8)$$

$$\bar{\bar{T}}_{\beta}(\xi, z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{T}_{\beta}(\xi, z, t) dt, \quad (1.9)$$

для трансформанти температури отримуємо

$$\bar{\bar{T}}_{\beta}(\xi, z, s) = \frac{\Lambda_{\beta}}{sk} \varphi_{\beta}(\xi) e^{-\kappa Z},$$

$$\kappa^2 = \xi^2 + \frac{s}{k}, \quad (1.10)$$

де

$$\varphi_{\beta}(\xi) = 2^{\beta} \Gamma(\beta + 1) J_{\beta+1}(\xi) / \xi^{\beta+1}. \quad (1.11)$$

Застосувавши до співвідношення (1.10) формули обернення інтегральних перетворень Ганкеля та Лапласа й повернувшись від трансформант до оригінальних функцій, отримуємо вираз для шуканого температурного поля у вигляді

$$T_{\beta}(r, z, t) = \Lambda_{\beta} \int_0^{\infty} \varphi_{\beta}(\xi) J_0(\xi \rho) \Phi(\xi, Z, Fo) d\xi. \quad (1.12)$$

У виразі (1.12) позначено:

$$\Phi(\xi, Z, Fo) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\xi Z} \operatorname{erfc} \left( \frac{Z}{2\sqrt{Fo}} - \xi\sqrt{Fo} \right) - e^{\xi Z} \operatorname{erfc} \left( \frac{Z}{2\sqrt{Fo}} + \xi\sqrt{Fo} \right) \right], \quad (1.13)$$

де  $Fo = kt / a_{\beta}^2$ .

Формула (1.12) задає температуру в будь-якій точці півпростору під час нестационарних процесів. Найвищі температурні значення спостерігаються в центрі контактної зони  $\rho = 0, Z = 0$  в установившому режимі  $t \rightarrow \infty, Fo \rightarrow \infty$ .

$$T_{\beta, \max}^{\infty} = \Lambda_{\beta} \frac{\Gamma(\beta + 1) \sqrt{\pi}}{2\Gamma(\beta + 1, 5)}. \quad (1.14)$$

Для часткового випадку герцівського розподілу контактної зони з (1.14) при  $\beta = 1/2$  отримуємо [13]

$$T_{1/2, \max}^{\infty} = \Lambda_{1/2} \pi / 4. \quad (1.15)$$

Беручи до уваги (1.15), перейдемо в (1.12) до безрозмірної температури

$$T_{\beta}^*(\rho, Z, Fo) = \frac{T_{\beta}(r, z, t)}{T_{1/2, \max}^{\infty}} = \lambda_{\beta} \int_0^{\infty} \varphi_{\beta}(\xi) J_0(\xi \rho) \Phi(\xi, Z, Fo) d\xi, \quad (1.16)$$

де  $\lambda_{\beta} = \frac{8(1 + \beta)a_{1/2}}{3\pi a_{\beta}}$ .

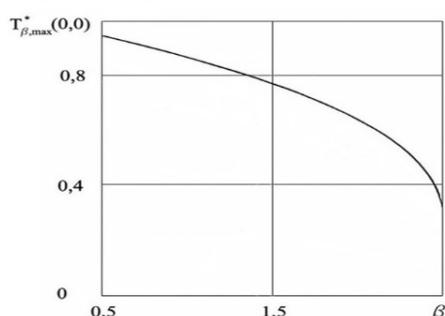
Обчислення інтеграла у правій частині виразу (1.16) виконано з використанням модифікованої схеми QAGI [12] у поєднанні з процедурою BESJP для обчислення функцій Бесселя  $J_{\beta}(\cdot)$  [13; 14].

Результати числового аналізу температурного поля подано у вигляді графіків на рис. 1.2–1.4. На цих графіках суцільні криві відображають випадок  $\beta = 0,5$  – герцівського розподілу контактної зони, характерного для важконавантажених режимів роботи вузлів тертя, тоді як штрихові лінії відповідають випадку  $\beta = 1,5$ .

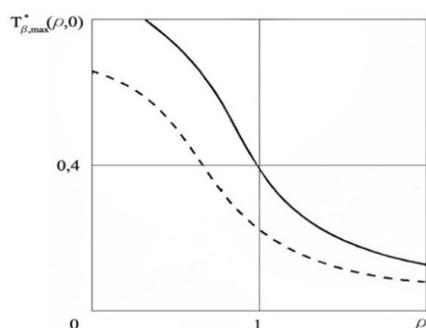
На рис. 2 наведено залежність максимальної температури в центрі контактної області від параметра шорсткості  $\beta$ . Помітно, що за сталого рівня енергії дисипації (який характеризується комплексом  $fVP$ ) зі збільшенням  $\beta$  від 0,5 (мінімального значення цього параметра) до 2,5 спостерігається зниження температури.

На рис. 3 показано розподіл максимальної поверхневої температури  $T_{\beta, \max}^*(\rho, 0)$  уздовж радіальної координати, а на рис. 4 – зміни  $T_{\beta, \max}^*(0, Z)$  уздовж аксіальної координати вглиб матеріалу. Спостерігається, що зі збільшенням відстані від центру контактної зони значення  $T_{\beta, \max}^*(\rho, 0)$  монотонно зменшується. Аналогічна тенденція характерна і для температурного

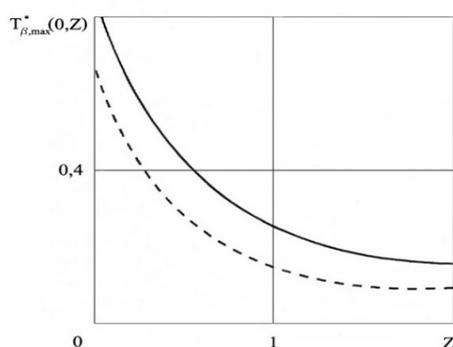
розподілу  $T_{\beta,\max}^*(0, Z)$  у глибинних шарах шорсткого півпростору.



**Рис. 2.** Залежність пікової температури в центрі контактної зони від значення параметра шорсткості  $\beta$   
**Fig. 2.** Dependence of the peak temperature in the center of the contact zone on the value of the roughness parameter  $\beta$



**Рис. 3.** Зміна максимальної температури  $T_{\beta,\max}^*(\rho, 0)$  на поверхні вздовж радіальної координати  
**Fig. 3.** Change in maximum surface temperature  $T_{\beta,\max}^*(\rho, 0)$  along the radial coordinate



**Рис. 4.** Розподіл значень температури  $T_{\beta,\max}^*(0, Z)$  вздовж аксіальної координати в глибину півпростору  
**Fig. 4.** Distribution of temperature values  $T_{\beta,\max}^*(0, Z)$  along the axial coordinate into the depth of the half-space

Отримані нами залежності температурного поля для шорсткого півпростору добре узгоджуються з основними тенденціями, наведеними в роботах інших дослідників, які аналізували фрикційне нагрівання з урахуванням мікрогеометрії поверхні.

По-перше, характерна зміна максимальної температури зі збільшенням параметра шорсткості  $\beta$  якісно співпадає з даними аналітичних та чисельних моделей, у яких реальна (контурна) площа контакту зростає із збільшенням шорсткості. Відомо, що розширення контактної зони за рахунок мікронерівностей призводить до зниження пікових температур, оскільки тепловий потік розподіляється на більшу площу. Така сама тенденція була встановлена у класичних моделях статистичних поверхонь (теорії Грінвуда-Вільямсона) та в сучасних квазігерцівських моделях, де профіль тиску відхиляється від ідеального герцівського при малих навантаженнях.

По-друге, форма кривих розподілу температури по радіусу та вглиб матеріалу узгоджується з результатами, отриманими для кругових та точкових фрикційних джерел у півпросторі. Зокрема, стрімке зменшення температури з ростом радіальної координати  $r$  спостерігається також у класичних розв'язаннях типу Ягера та в пізніших роботах, де враховано неповну або багатоточкову контактну поверхню. Декілька авторів відмічали, що при зменшенні ефективного радіуса контакту (внаслідок шорсткості або нерівномірного тиску) температурний пік стає вищим і вузким – саме таку поведінку демонструє і герцівський ( $\beta=0$ ) випадок у наших розрахунках.

По-третє, залежності температури в напрямку аксіальної координати  $\zeta$  підтверджують відому закономірність експоненційного чи квазіекспоненційного затухання теплових хвиль у півпросторі, яку описують як класичні аналітичні, так і чисельні моделі. Зокрема збіг спостерігається з результатами, отриманими в роботах, де фрикційний тепловий потік моделюється за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля – саме такі самі елементи математичного апарату використовуються у нашому дослідженні.

Загалом можна зазначити, що поведінка температурних полів у запропонованій моделі повністю відповідає відомим експериментальним і теоретичним закономірностям:

- збільшення шорсткості  $\rightarrow$  зростання фактичної площі контакту  $\rightarrow$  зниження максимальних температур;

- герцівський розподіл тиску дає найвищі температурні піки;
- температурний градієнт найбільш різкий у безпосередній околі центру контактної зони;
- із віддаленням у глибину й по радіусу відбувається стрімке монотонне затухання температури.

Отже, отримані результати як якісно, так і кількісно узгоджуються з поширеними моделями фрикційного нагрівання та можуть розглядатися як їхнє уточнення з урахуванням реальної (контурної) структури контактної поверхні.

**Висновки.** Проведено теоретичний аналіз нестационарних температурних полів у шорстких тілах при терті з круговою зоною контакту. Задачу розв'язано на основі рівняння нестационарної теплопровідності з використанням інтегральних перетворень Ганкеля та Лапласа, що дало змогу отримати аналітичні залежності для визначення температурного поля в півпросторі.

Показано, що форма розподілу контактного тиску істотно впливає на температурний стан зони тертя. Урахування квазігерцівського (еліптичного) розподілу тиску дозволяє адекватніше описати теплові процеси на мікрорівні порівняно з класичною герцівською моделлю, особливо для трибоз'єднань із невеликими навантаженнями та значною шорсткістю.

Встановлено, що зі зростанням параметра шорсткості від 0,5 до 2,5 максимальна температура в центрі контактної зони зменшується, що свідчить про важливу роль мікрогеометрії поверхонь у формуванні теплового режиму.

Результати числових розрахунків показали, що температурне поле має виражену локальну концентрацію поблизу центру контактної ділянки, а з віддаленням по радіусу та в глибину півпростору температура монотонно знижується.

Запропонований підхід може бути використаний для оцінювання термонапруженого стану елементів фрикційних вузлів (дискових гальм, підшипників ковзання та кочення, муфт зчеплення тощо) і забезпечує вищу точність розрахунків порівняно з класичними спрощеними моделями.

### Бібліографічний список

1. Бондаренко І. О., Тимошенко С. П. Тепловий стан контактної пари з урахуванням теплофізичних властивостей матеріалів. *Вісник НТУУ "КПІ". Серія Машинобудування*. 2017. № 78. С. 102–110.
2. Дрозд М. С., Гайдук І. В. Нестационарні температурні поля при терті тіл з круговим контактом. *Механіка та машинобудування*. 2013. № 1. С. 35–41.
3. Квасницький В. В., Мельник Л. М. Моделювання теплових процесів у трибосистемах з урахуванням мікрогеометрії поверхонь. *Матем. моделювання*. 2015. Т. 27, № 2. С. 41–49.
4. Лапшин В. М., Кузьмін О. В. Теплові поля при терті тіл з неоднорідною шорсткістю. *Проблеми трибології*. 2010. № 2. С. 17–25.
5. Рибак О. С. Моделювання процесів теплопередачі у фрикційних з'єднаннях з локалізованими джерелами тепла. *Інженерно-фізичний журнал*. 2019. Т. 92, № 5. С. 1256–1263.
6. Семерак В. М., Косарчин В. І. Термонапружений стан в околі локальної ділянки фрикційного контакту. *Вісник ЛНАУ: агроінженерні дослідження*. 2014. № 18. С. 271–275.
7. Семерак В. М., Ніщенко І. О., Пономаренко О. М. Температура на плямах фактичного контакту при гальмуванні. *Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження*. 2014. № 18. С. 262–266.
8. Тищенко В. О., Білоус В. О. Чисельне моделювання температурного поля при терті шорстких тіл. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2020. № 32. С. 77–86.
9. Adams M. J., Johnson S. A. Thermal effects in tribological contacts: models and applications. *Wear*. 2006. Vol. 261, No. 1. P. 109–119. DOI: 10.1016/j.wear.2005.09.014.
10. Analytical and numerical calculation of surface temperature in sliding contact / Aderghal N. et al. *Applied Thermal Engineering*. 2011.
11. Jaeger J. C. Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. *Proceedings of the Royal Society of New South Wales*. 1943.
12. Reddy J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2004. 766 p.
13. Taylor R. I. Rough Surface Contact Modelling-A Review. *Lubricants*. 2022. Vol. 10, No. 9. Article 207. DOI: 10.3390/lubricants10090207
14. Tian X., Kennedy F. E. Contact surface temperature models for finite bodies in sliding contact. *Journal of Tribology*. 2004. Vol. 126, No. 3. P. 449–454. DOI: 10.1115/1.1695589.
15. Yevtushenko A., Kuciej M. *Nonlinear Problems of Frictional Heating of Solids*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2012. 300 p.

Стаття надійшла 12.02.2025