

Розділ 7
**МОДЕЛЮВАННЯ МАШИН, ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ
В АГРОІНЖЕНЕРІЇ**

УДК 621.682

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ В РОБОЧІЙ ЗОНІ
БОРОШНОМЕЛЬНОГО ВАЛЬЦЯ**

*Олексій Бурнаєв, к. ф.-м. н., Віктор Семерак, к. т. н., Олександр Пономаренко, к. ф.-м. н.,
Іван Городецький к. т. н., Ольга Лиса, к. т. н.*

*Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: semerakviktor@gmail.com*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.161-165>

Бурнаєв О., Семерак В., Пономаренко О., Городецький І., Лиса О. Математичне моделювання теплопередачі в робочій зоні борошномельного вальця

У статті представлено розширене аналітичне та чисельно-аналітичне дослідження теплопередачі в робочій зоні борошномельного вальця, де під час взаємодії зернової маси з металевою поверхнею формується інтенсивне й просторово нерівномірне тепловиділення. Показано, що тепло, яке виникає внаслідок сил тертя, пластичної деформації та часткового руйнування зерен, значною мірою накопичується в контактній зоні та визначає характер підвищення температури поверхні вальця, а також впливає на якість готового продукту. На основі класичної моделі рухомих джерел тепла Єгера сформовано аналітичну залежність для опису температурного профілю в безрозмірних координатах, що дозволяє універсально застосовувати результати для вальців різних типорозмірів та конструкцій. Розглянуто вплив числа Пекле, геометричних параметрів зони контакту, теплопровідності матеріалу та величини питомого теплового потоку на формування температурного поля. Встановлено, що максимальна температура виникає поблизу вихідного краю зони контакту, де спостерігається найбільший інтегральний вплив джерела тепла. Зі збільшенням числа Пекле пікове значення температури знижується, але зона прогріву суттєво подовжується за межі контакту, що вказує на зміну механізму теплоперенесення. Чисельні обчислення, виконані шляхом інтегрування функцій розподілу тепловиділення, підтвердили справедливість моделі для широкого діапазону режимів роботи вальцових верстатів. Досліджено ефективність внутрішнього рідинного охолодження та показано, що воно знижує середній температурний рівень, але майже не впливає на локальне перегрівання. Запропоновано заходи інтенсифікації тепловідведення, серед яких попереднє охолодження зерна, оптимізація швидкості обертання та застосування локального вискоефективного охолодження безпосередньо у зоні контакту. Отримані результати можуть бути використані для вдосконалення теплового режиму вальцових систем та підвищення якості борошномельної продукції.

Ключові слова: теплова зона контакту, розподіл температури, борошномельний валець, число Пекле, теплопередача, аналітичне моделювання, охолодження вальців, тепловий режим, механічне подрібнення зерна, енергоефективність.

Burnaiev O., Semerak V., Ponomarenko O., Horodetskyi I., Lysa O. Mathematical modeling of heat transfer in the working zone of a flour mill roller

The article presents an extended analytical and numerical study of heat transfer processes occurring in the working zone of a flour milling roller, where intensive and spatially non-uniform heat generation arises during the interaction between the grain mass and the metallic roller surface. It is demonstrated that heat produced by friction, plastic deformation, and partial fracture of grain accumulates within the contact region and strongly determines the temperature rise on the roller surface, ultimately influencing product quality. Based on Jaeger's classical theory of moving heat sources, an analytical model is developed to describe the temperature distribution in dimensionless coordinates, enabling the application of the results to rollers of various sizes and structural configurations. The influence of the Peclet number, thermal conductivity, geometric characteristics of the contact zone, and heat flux intensity on the formation of the temperature field is analyzed in detail. The study shows that the maximum temperature occurs near the trailing edge of the contact zone, where the cumulative thermal effect is the strongest. Increasing the Peclet number reduces the peak temperature, yet considerably extends the downstream heated region, reflecting a shift in the balance between heat diffusion and roller surface velocity. Numerical simulations based on double integration of the heat-release distribution validate the analytical model across a wide range of milling regimes. The effectiveness of internal liquid cooling is investigated, revealing that it reduces the average temperature but provides only limited mitigation of local overheating within the contact area. Several strategies for improving thermal management are proposed, including pre-cooling of the grain, optimization of rotational parameters, and the use of localized high-intensity cooling methods. The results obtained contribute to improving the thermal stability, operational efficiency, and product quality in roller milling systems.

Keywords: thermal contact zone, temperature distribution, flour mill roller, Peclet number, heat transfer, analytical modeling, roller cooling, thermal regime, mechanical grinding of grain, energy efficiency.

Постановка проблеми. У процесі помелу зерна у вальцьових верстатах (рис. 1) відбувається інтенсивне виділення тепла, зумовлене тертям та деформацією зернової маси. Частина цього тепла відводиться вальцем, проте значна його кількість залишається у продукті, що може призводити до перегріву борошна та погіршення його якості. Внутрішнє охолодження вальця, яке здійснюється прокачуванням рідини, не забезпечує ефективного зниження температури в безпосередній зоні контакту. При цьому розподіл температури по поверхні вальця залежить від конструктивних параметрів, швидкості обертання, умов контакту й теплопровідності матеріалів. Відсутність достатньо точних моделей теплопередачі в таких системах ускладнює прогнозування температурних режимів і розробку оптимальних методів охолодження. Тому виникає потреба у створенні аналітичних моделей, здатних описати динамічний розподіл тепла в зоні взаємодії вальця із зерновою масою та наданні практичних рекомендацій для зниження перегріву продукту.

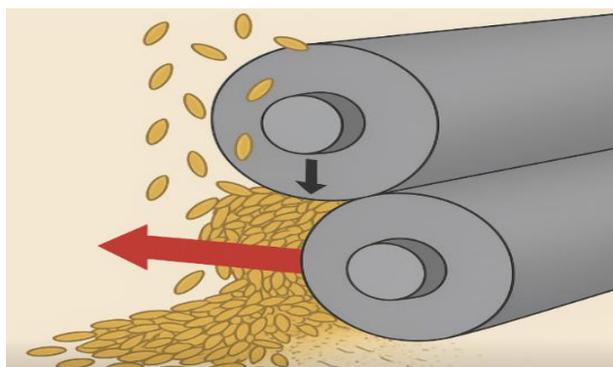


Рис. 1. Зображення борошномельних вальців
Fig. 1. Image of flour milling rollers

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні дослідження поєднують класичну аналітику рухомих джерел тепла (Jaeger) [5] з чисельними моделями й експериментальними вимірами у млиновій практиці. Це дає змогу як отримувати загальні безрозмірні висновки (наприклад, роль числа Пекле), так і порівнювати їх із реальними профілями температури роликів та продукту. Класична аналітика рухомого (стрічкового) джерела тепла, викладена Jaeger (1943), залишається базовою для задач ковзного / рухомого нагріву поверхонь і дає явні безрозмірні співвідношення, які використовуються для інтерпретації даних про вальці.

На її основі розвивалися теорії контактного і роликowego нагріву (оглядні результати у Vejan

[3], що пояснюють розподіл тепла при роликвому контакті та вплив параметрів руху й дифузії тепла.

Сучасні статті (наприклад Aderghal et al., 2011) [1] поєднують аналітичні рішення для рухомої теплової смуги з чисельними FEM / FDM розв'язками для переходу задач ковзного контакту, включаючи ефект охолодження поза зоною контакту та часові інтеграли джерела. Такі роботи підтверджують, що аналітичні наближення коректні в широкому діапазоні Pe , але для врахування об'ємного розподілу джерела або шорсткості потрібні чисельні моделі.

Постановка завдання. У процесі механічної роботи – деформації та руйнування органічного матеріалу під дією тертя й розтирання зерна – на поверхні борошномельних вальців виділяється тепло, яке розподіляється між самим вальцем, продуктом помелу та частково навколишнім повітрям [4; 11; 13; 15]. За умов високої енергоємності виробництва це тепловиділення стає відчутним і більше впливає на якість кінцевого продукту, ніж на міцність чи надійність обладнання. Оскільки контакт між зерном і вальцем є неідеальним, а борошно характеризується низькою теплопровідністю, частина тепла не відводиться навіть за наявності примусового охолодження вальців, що іноді призводить до перегріву продукту. Тому аналітичне моделювання процесів теплопередачі в таких системах залишається важливим завданням, попри накопичений значний практичний досвід їх експлуатації.

Метою дослідження є аналіз температурного режиму робочої зони борошномельного вальця при механічному подрібненні зерна та визначення основних чинників, що впливають на нагрів поверхні та продукту. Для цього необхідно виконати такі завдання:

1. Математичне моделювання тепловиділення:

- розглянути процес тепловіддачі від зерна до поверхні вальця, приймаючи тепловиділення в зоні контакту постійним у першому наближенні;
- встановити залежності між тепловим потоком, параметрами вальця (матеріал, геометрія, швидкість обертання) та характеристиками нагріву.

2. Аналітичний розрахунок температурного поля:

- використати аналітичні методи для визначення температурного розподілу по поверхні вальця та у приповерхневій зоні зернової маси;
- врахувати вплив числа Пекле (Pe) на максимальну температуру та ширину прогріву.

3. Чисельне моделювання та побудова профілів температури:

- розрахувати безрозмірні температурні профілі в робочій зоні за допомогою чисельної інтеграції функцій розподілу тепла;

- порівняти отримані профілі для різних швидкостей обертання та параметрів вальців.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо процеси теплопередачі в робочій зоні вальця, вважаючи його поверхню ідеально циліндричною та ігноруючи її шорсткість. Кількість енергії, що виділяється в зоні контакту, а отже, й тепловий потік h можна визначити експериментально – порівнянням споживаної потужності обладнання під навантаженням і без нього. Такі вимірювання дозволяють оцінити коефіцієнт корисної дії всього агрегату без необхідності деталізувати втрати в двигуні, приводі чи окремих вузлах тертя.

Припустимо, що під час розмелу певної порції зерна ця маса внаслідок стискання поводить як суцільне нагріте тіло з температурою ϑ_1 , яке контактує з холоднішою поверхнею вальця ϑ_2 . Оскільки аналітичний опис процесу взаємодії зернової маси з вальцем під час розмелу є неповним, вважаємо, що між ними існує нерівномірне тангенціальне ковзання. При цьому тепловиділення приймається сталим уздовж контактної ділянки (через складність його точного визначення) і оцінюється за споживаною потужністю обладнання. З огляду на малу площу контакту порівняно з довжиною твірної вальця, у першому наближенні тепловий потік \mathbf{H} визначатимемо за формулою

$$\dot{H} = 4 \cdot k \cdot a \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (1)$$

де $k = k_1 \cdot k_2 / (k_1 + k_2)$; k_1 – коефіцієнт теплопровідності спресованої зернової маси; k_2 – коефіцієнт теплопровідності матеріалу вальця; a – довжина дуги контакту вальця з продуктом.

З огляду на значну різноманітність типорозмірів борошномельних вальців, задачу теплопровідності доцільно розглядати у безрозмірних координатах. Враховуючи, що зона контакту a є малою порівняно з радіусом кривизни поверхні вальця R , для визначення температури його поверхні можна використати аналітичні результати, подані Єгером [5] для випадку рухомого стрічкового джерела тепла. У цій постановці процес вважається стаціонарним, причому замість руху поверхні відносно нерухомого джерела розглядається еквівалентний варіант – переміщення джерела вздовж поверхні. Це не змінює фізичної суті задачі, але дозволяє описати температурне

поле в тілі як функцію координат, а не часу. Нехтуючи крайовими ефектами поблизу торців вальця, приймаємо задачу двовимірною, вважаючи джерело тепла рівномірно розподіленим уздовж нескінченної смуги шириною $2a$, паралельної осі вальця. Таке розподілене джерело можна трактувати як сукупність точкових джерел інтенсивності h , розташованих вздовж прямої. За умови відомого тангенціального розподілу тепла в зоні контакту задача має чисельний розв'язок. Виконавши заміну часу t на координати положення матеріалу (x, z) з урахуванням швидкості обертання вальця ω та його радіуса R , отримуємо вираз $(x - R\omega t, z)$, який дозволяє пов'язати температуру в точці з її розташуванням відносно зони тепловиділення.

Без детального наведення класичних розрахунків, що впливають з рівнянь нестационарної теплопровідності, за умови незначних розмірів зони контакту між вальцем і борошном, розподіл температури на його поверхні поблизу області дотику можна подати у вигляді виразу

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \frac{ha}{kL^{1/2}} F(L, X), \quad (2)$$

де ϑ_0 – температура на значній відстані від поверхні вальця (у нашому випадку – температура охолоджувальної рідини, що циркулює всередині циліндра); $L = R\omega a / 2\kappa$ – число Пекле; $X = R\omega x / 2\kappa$ – безрозмірна відстань вздовж поверхні; κ – коефіцієнт теплопровідності зовнішнього шару вальця.

Виходячи з формули (2) встановлено, що максимальна температура, навіть за умови рівномірного теплового потоку вздовж зони нагріву, досягається поблизу її кінця, оскільки саме ця ділянка найдовше перебуває під дією теплового впливу. Величини максимальної та середньої температур у зоні нагріву визначаються параметром Пекле «L», який можна трактувати як відношення швидкості обертання (або лінійної швидкості поверхні) до швидкості теплопровідності в матеріалі. За великих швидкостей обертання ($L > 5$) протягом часу проходження точки через зону нагріву тепло встигає проникнути у валець лише на незначну глибину. У такому випадку тепловий потік майже по всій поверхні спрямований практично перпендикулярно до неї.

Температурне поле точки в межах зони контакту визначається виразом

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_0 + \frac{h}{k} \left(\frac{4\kappa a}{\pi R\omega} (1+x) \right)^{1/2}, \quad (3)$$

де $\vartheta = \frac{\pi k R \omega}{4 h a \kappa}$ – безрозмірна температура

Отримані результати подано на рис. 2, 3. Розрахунки проводилися у середовищі MathCad 2000 Professional із використанням вбудованих алгоритмів числового інтегрування. При цьому як умовна «мінус нескінченність» за часом приймався інтервал, що відповідає одному повному оберту вальця.

На рис. 2 подано характер зміни температури поверхні робочої зони за умови руху джерела тепла зліва направо. На початку ділянки контакту спостерігається найвищий темп зростання температури, тоді як максимальне її значення досягається наприкінці зони нагріву. Після цього температура знижується, що супроводжується зломом температурної кривої та зміною її кривизни.

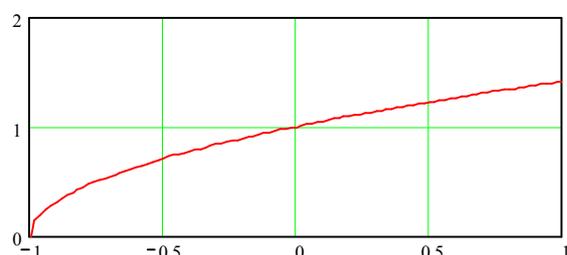


Рис. 2. Відносне перевищення температури вальця у робочій зоні $[-a, a]$ над температурою теплоносія зростає по кореневому закону

Fig. 2. The relative excess of the roller temperature in the working zone $[-a, a]$ over the coolant temperature increases according to the root law

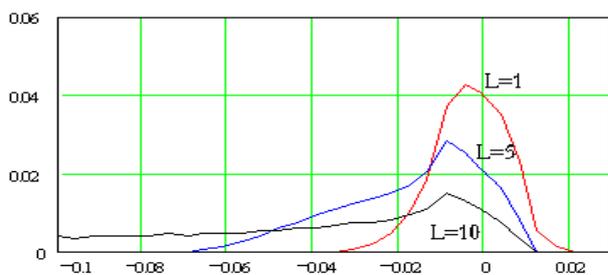


Рис. 3. Температура приповерхневої зони вальця в околі точки дотику з зерном залежно від числа Пекле L (розрахунки велись для $L=1, 5, 10$)

Fig. 3. Temperature of the surface zone of the roller in the vicinity of the point of contact with the grain depending on the Peclet number L (calculations were carried out for $L=1, 5, 10$)

Використовуючи результати дослідження [2] та співвідношення (2), побудовано залежність температурного поля в безпосередньому околі поверхні вальця від моменту проходження зони контакту з борошном. Для цього застосовано числове інтегрування подвійних інтегралів від функції

розподілу тепловиділення, що моделювалося у вигляді точкового джерела сталої інтенсивності, переміщеного вздовж відрізка зони контакту. Інтегрування виконувалося по площі контакту та часовій змінній у межах від мінус нескінченності до нуля.

Як бачимо (див. рис. 3), за малих чисел Пекле (наприклад, $L=1$, що відповідає найвищій кривій) температура поверхні вальця наближається до симетричного розподілу відносно зони контакту. У цьому випадку максимальне значення температури є відносно високим, однак прогрів навколишнього матеріалу за межами зони контакту залишається незначним.

Зі зростанням числа Пекле спостерігається зниження пікової температури, водночас розширюється зона нагріву поверхні вальця за межами контакту з продуктом. При цьому на графіку з'являється характерний злам у точці завершення зони нагріву, що свідчить про зміну механізму теплопереносу.

Для визначення температурного поля безпосередньо в зоні розмелу зерна, де теплова дія має найбільше значення, використання формули (3) є некоректним, оскільки вона не враховує об'ємного тепловиділення, зумовленого деформацією зерна, та співвідношення цієї складової з теплом, що виникає внаслідок тертя в парі «зерно – валець». Оцінити потужність внутрішніх джерел тепла, не відведених борошномельним вальцем, можна експериментально – за допомогою вимірювання температури одиниці об'єму продукту після помелу. Такі результати доцільно використовувати для коригування (або заміни на експериментально встановлене значення) формули (1).

Середнє значення температури в зоні контакту може бути розраховане за співвідношенням

$$\bar{\vartheta}_{mean} \approx \vartheta_0 + \frac{4}{3} \frac{ha}{k} (\pi L)^{-1/2}. \quad (4)$$

Аналіз формули (4) свідчить, що питомий тепловий потік h робить суттєвіший внесок у підвищення температури, ніж число Пекле L , оскільки у вираз він входить у вищому степені (на $1/2$). Водночас величини h та L є взаємопов'язаними через параметри зони контакту a , швидкість обертання та радіус вальця, від яких залежить як число Пекле (формула (2)), так і значення теплового потоку [6; 7–10; 12; 14].

Висновки

1. Показано, що питомий тепловий потік h має більший вплив на зростання температури поверхні вальця, ніж число Пекле L , оскільки входить у формулу у вищому степені (на $1/2$).

2. Встановлено кореляцію між величинами h та L , що зумовлена параметрами зони контакту a , швидкістю обертання та радіусом вальця.

3. Аналітична модель побудована з використанням низки спрощень: прийнято гіпотезу про сталість тепловиділення в зоні контакту, проігноровано вплив шорсткості поверхні та співвідношення між тепловими ефектами від тертя й деформації зерна.

4. Якісний аналіз показав, що при високих швидкостях обертання максимальна температура поверхні зменшується, за умови збереження сталої продуктивності обладнання.

5. Встановлено, що внутрішнє охолодження вальця циркуляцією рідини знижує лише середнє температурне значення, не забезпечуючи ефективного охолодження в зоні контакту.

6. Рекомендовано застосування попереднього охолодження зерна та поверхні вальця перед подачею у робочу зону.

7. Як перспективний напрям запропоновано дослідити доцільність локального охолодження за допомогою розпиленої вуглекислоти (сухого льоду), що забезпечує інтенсивне випаровування саме в найбільш нагрітих ділянках і тим самим підвищує ефективність теплового режиму.

Бібліографічний список

1. Aderghal M., Kezzar M., Cheknane A. Thermal analysis of a moving heat source with application to tribological contacts. *Applied Thermal Engineering*. 2011. Vol. 31, Iss. 14–15. P. 2545–2553. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2011.04.021.
2. Barber J. R. Thermal effects of sliding contact. *Tribology International*. 2014. Vol. 79. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.triboint.2014.05.001.
3. Bejan A. *Convection Heat Transfer*. 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. 688 p.

4. Campbell G. M., Webb C., Pandiella S. S. Roller milling of wheat: quality, processing, and thermal effects. *Journal of Cereal Science*. 2011. Vol. 54, Iss. 2. P. 193–202. DOI: 10.1016/j.jcs.2011.05.002.

5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2011. 510 p.

6. Fang Q., Zhang X., Li B. Heat transfer characteristics in rolling contact under high-speed conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. Vol. 98. P. 350–360. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.03.042.

7. Heisel U., Eisseler R., Schaal M. Thermal loads in high-speed rolling contacts. *Production Engineering*. 2014. Vol. 8, Iss. 2. P. 197–204. DOI: 10.1007/s11740-013-0507-9.

8. Incropera F. P., DeWitt D. P., Bergman T. L., Lavine A. S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011. 1072 p.

9. Lim S. C., Ashby M. F. Wear mechanism maps. *Acta Materialia*. 2010. Vol. 35, Iss. 1. P. 1–24. DOI: 10.1016/0001-6160(87)90209-4.

10. Meng H.-C., Ludema K. C. Wear models and predictive equations: their form and content. *Wear*. 2010. Vol. 181–183. P. 443–457. DOI: 10.1016/0043-1648(95)90158-2.

11. Posner E. S., Hibberd S. Thermal damage in cereal milling processes. *Biosystems Engineering*. 2013. Vol. 116, Iss. 3. P. 312–320. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2013.08.002.

12. Riahi A. R., Jabbari M. Modeling of heat generation in rolling contact with friction. *Journal of Heat Transfer*. 2012. Vol. 134, Iss. 3. Article 031301. DOI: 10.1115/1.4005268.

13. Scanlon M. G., Dexter J. E. Role of heat generation in flour milling. *Cereal Chemistry*. 2012. Vol. 89, Iss. 4. P. 179–186. DOI: 10.1094/CCHEM-01-12-0006-R.

14. Wang Y., Li Y., Zhang H. Numerical simulation of temperature distribution in roller milling. *Powder Technology*. 2017. Vol. 305. P. 356–364. DOI: 10.1016/j.powtec.2016.10.030.

15. Zohdi T. I. *Mechanics of Granular Media: Modeling, Computations, and Applications*. Berlin: Springer, 2015. 320 p. DOI: 10.1007/978-3-662-45224-9.

Стаття надійшла 15.02.2025