

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ШИРОКИХ СТРИЖНЯХ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ЗА ЧИСТОГО ЗСУВУ

*Олександр Пономаренко¹, к. ф.-м. н., Олексій Бурнаєв¹, к. ф.-м. н.,
Віктор Семерак¹, к. т. н., Орест Гавриляк²*

*¹Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
²ВСП «“Автомобільно-дорожній фаховий коледж” Національного університету*

“Львівська політехніка”»

вул. Личаківська 2, м. Львів, Україна,

e-mail: alexanderponomarenko54@gmail.com e-mail: alexislviv@gmail.com

e-mail: semerakviktor@gmail.com e-mail: orestgavrilak@gmail.com

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.145-150>

Пономаренко О., Бурнаєв О., Семерак В., Гавриляк О. Математичне моделювання напруженого стану в широких стрижнях з двома круговими отворами за чистого зсуву

Зауважено, що у проектуванні споруд і машин в авіа-, корабле-, машинобудуванні широко застосовують пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме в таких ділянках з'являються крихіткі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

Зазначено, що вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів є важливим завданням як із теоретичного, так і з інженерного погляду. Наведено розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у широких стрижнях із двома нерівними круговими отворами за чистого зсуву. Задача розв'язується виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленому отворами стрижні, і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв'язку з наявністю отворів. Задача зводиться до визначення бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурах отворів та на нескінченності. Наукова новизна полягає в тому, що розв'язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактору, як орієнтація отворів щодо поля навантажень у вигляді чистого зсуву. Розв'язок задачі подано в біполярних координатах. Отримано формули для напружень по контурах отворів, а також відомий результат для зсуву стрижня з одним круговим отвором. Отримано значення напружень по контурах отворів для деяких часткових випадків. Результати, отримані в роботі, дають змогу провести теоретичне визначення коефіцієнта концентрації напружень біля отворів і можуть бути використані в інженерній практиці під час проектування деталей у корабле-, авіа- та машинобудуванні.

Ключові слова: концентрація напружень біля отворів, бігармонічні функції напружень, біполярні координати.

Ponomarenko O., Burnaiev O., Semerak V., Havryliak O. Mathematical modeling of the strained state in broad pivots with two circular holes by crook

It has been observed that elastic components, such as thin plates, are widely used in the design of structures and machines across aviation, shipbuilding, and mechanical engineering. However, these parts are often weakened by various holes for several reasons. When such components are subjected to loading, stress concentrations tend to occur near the holes, which can negatively impact their strength. The distribution of stresses around the edges of the holes is uneven, leading to small areas that experience significantly high stresses. It is in these places that brittle cracks or plastic deformations can develop, potentially resulting in structural failure.

Studying the distribution of stresses near curved holes is crucial from both theoretical and engineering perspectives.

This work presents a solution to the problem of stress concentration in broad pivots featuring two unequal circular holes by crook. The solution is based on a fundamental stress function associated with the stress state in a rod that does not have any holes, to which a second biharmonic function is added. This additional function represents the stress state that arises due to the presence of the holes. The challenge lies in determining the biharmonic stress function that satisfies the boundary conditions at the contours of the holes and extends out to infinity. The scientific novelty of this work is that it provides insights into how the orientation of holes relative to the field of crook loads influences stress concentration. The solution is presented in bipolar coordinates, and formulas for the stresses along the contours of the holes are derived. Additionally, the known result for the

displacement of a crook pivots with a single circular hole is included. The obtained stress values along the contours of the holes for certain special cases are also reported.

The findings of this study enable the theoretical determination of the stress concentration factor near the holes and can be effectively applied in engineering practice when designing components in shipbuilding, aircraft construction, and mechanical engineering.

Keywords: concentration of stresses near holes, biharmonic functions of stresses, bipolar coordinates.

Постановка проблеми. Найважливіше завдання машинобудування – раціональне та економне використання металу, підвищення технічного рівня та якості продукції машинобудування, її надійності та довговічності. Створення нових конструкцій машинобудування з легшою вагою при покращенні їх якості можливе лише в разі врахування дійсних умов роботи цих конструкцій у зоні пружних деформацій.

У сучасних промисловості та будівництві під час проектування споруд і машин в авіа-, корабле-, машинобудуванні широко застосовують пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме в таких ділянках з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції. Тому вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів – важливе завдання як із теоретичного, так і з інженерного погляду.

Наше дослідження присвячене вивченню впливу двох кругових отворів на розподіл напружень в широких стрижнях за чистого зсуву.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Проблеми концентрації напружень розглянуто в працях міжнародної наукової конференції, присвяченої 75-річчю академіка НАН України О. С. Космодам'янського [19]. У праці [1] описано застосування методів теорії пружності для дослідження та розрахунків металургійного обладнання. У працях [2; 6–10] наведено наближений метод визначення напруженого стану багатозв'язної ізотропної півплощини з отворами і тріщинами, розглянуто розв'язок циклічної задачі для пластини з отворами і тріщинами і її застосування в гірничій справі.

У публікації [4] описано дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та тріщиною.

У монографії [5] викладено сучасні ефективні методи визначення напруженого стану багато-

зв'язних однорідних і кусково-однорідних ізотропних пластинок з отворами, тріщинами і включеннями, наведено розв'язки різних класів задач, описано результати числових досліджень з їхнім аналізом і встановленням закономірностей впливу на значення напружень та їх концентрацію геометричних характеристик отворів, тріщин і включень, їх кількості і розміщення, фізико-механічних характеристик досліджуваних середовищ.

У монографії [5] описано застосування методу функції комплексної змінної та конформних відображень стосовно задач теорії пружності.

У праці [12] досліджено динамічну концентрацію напружень на краю колового отвору за дії на нього несиметричного навантаження.

Надзвичайно широкий спектр задач розглянуто учасниками Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» у 2018 р., присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики у Львові [21].

У праці [11] досліджено напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів із крайовими тріщинами або смугами пластичності.

Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною подано у праці [16]. Питання регуляризації формули обернення перетворення Лапласа стосовно визначення концентрації динамічних напружень у пластинках з отворами розглянуто у праці [20]. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їхніх вершин проаналізовано в праці [18].

У публікації [23] досліджено динамічну поведінку ортотропних пластин із отворами та включеннями.

У праці [3] проведено скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями.

Публікація [13] присвячена вивченню напружень у безмежній тонкій пластині з круговим включенням і круговим отвором за умов розтягу.

У праці [22] досліджено вплив зміни напрямку ортотропії на динамічну поведінку пластини з отворами за дії розподіленого навантаження на її поверхні.

У працях [14, 15] досліджено концентрацію напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під кутом до лінії центрів отворів та у півплощині з круговим отвором при розтягу під кутом до прямолінійного краю.

Постановка завдання. Наше завдання – отримання розв’язку задачі теорії пружності про вплив двох кругових отворів на розподіл напружень у широких стрижнях за чистого зсуву; знаходження коефіцієнтів концентрації напружень на контурах отворів залежно від орієнтування отворів щодо поля навантажень у вигляді чистого зсуву.

Розв’язок задачі наводиться виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленому отворами стрижні, і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв’язку з наявністю отворів. Задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурах отворів та на нескінченності.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що розв’язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактору, як орієнтування отворів відносно поля навантажень у вигляді чистого зсуву.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу про розподіл напружень у плоскому ізотропному широкому стрижні, послабленому двома нерівними круговими вирізами, що перебуває під дією чистого зсуву. Введемо в розгляд кут φ , утворений віссю Ox з віссю стрижня, що дасть нам змогу дослідити картину напруженого стану за різних варіантів розміщення вирізів у стрижні. Будемо припускати, що розміри вирізів невеликі порівняно з поперечними розмірами стрижня. Це допущення зводиться до того, що по зовнішньому контуру стрижня, послабленого вирізами, повинна бути та ж картина напруженого стану, що і в неослабленому стрижні. Крім того, припускається, що до контурів вирізів не прикладено жодних зовнішніх навантажень. Виберемо систему координат HOY так, щоб вісь Ox утворювала кут φ із віссю стрижня і проходила через центри вирізів, а вісь Oy була перпендикулярна до осі Ox , на деякій віддалі від центрів (рис.).

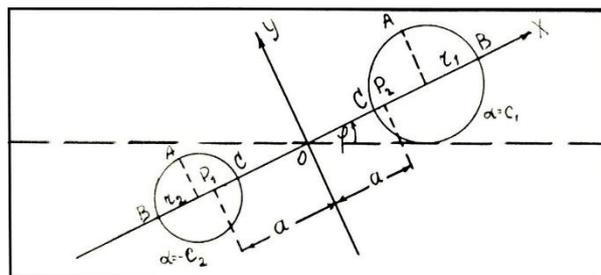


Рис. Схема навантаження стрижня
Fig. Schema of pivot loading

Використаємо біполярні координати α, β [17]. Функцію напружень подамо у вигляді:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 (U_{0,i} + K_i U_{1,i}) \quad (1)$$

де

$$\sum_{i=1}^3 U_{0,i} = -\tau \left[(x^2 - y^2) \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2} + xy \cos 2\varphi \right] -$$

основна функція напружень;

$$\sum_{i=1}^n K_i U_{1,i}, \quad \text{де}$$

$$K_1 = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi;$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \sin 2\varphi;$$

$$K_3 = -\cos 2\varphi - \quad (2)$$

додаткова функція напружень, яка повинна бути підібрана так, щоб давати нульовий напружений стан у нескінченно віддалених точках, а на контурах отворів компоненти напружень $\mathcal{E}_{\alpha,1}$, $\mathcal{T}_{\alpha\beta,1}$, що виникають від функції $\sum_{i=1}^3 K_i U_{1,i}$, повинні бути рівні і протилежні за знаком до компонент напружень $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, $\tau_{\alpha\beta,0}$, що виникають від функції $\sum_{i=1}^3 U_{0,i}$ (оскільки контури отворів вільні від зовнішніх навантажень).

Враховуючи однозначність переміщень, а також основний напружений стан, беремо функції $U_{1,i}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} U_{1,i}(\alpha, \beta) = & G_i (ch\alpha - \cos\beta) \ln(ch\alpha - \cos\beta) + J_i \alpha (ch\alpha - \cos\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,1}(\alpha) \cos n\beta, \\ & (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} U_{1,3}(\alpha, \beta) = & J_{3\beta} (ch\alpha - \cos\beta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{n,1}(\alpha) \sin n\beta, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{f}_{n,k}(\alpha) = \mathcal{A}_{n,k} ch(n+1)\alpha + \mathcal{B}_{n,k} ch(n-1)\alpha + \mathcal{C}_{n,k} sh(n+1)\alpha + \mathcal{D}_{n,k} sh(n-1)\alpha, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Граничні умови на контурах отворів будуть такими:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\alpha|_\alpha = c_1 = \mathfrak{S}_\alpha|_\alpha = -c_2 = \tau_{\alpha\beta}|_\alpha = c_1 = \\ = \tau_{\alpha\beta}|_\alpha = -c_2 = 0, (4) \end{aligned}$$

а умова на нескінченності:

$$\varphi U_{1,i}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0.$$

Отже, з граничних умов (4) після перетворень отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються всі невідомі коефіцієнти шуканої функції напружень.

Для напружень на контурах отворів після перетворень отримаємо:

$$\mathfrak{S}_\beta \begin{cases} \alpha = C_1 \\ \alpha = -C_2 \end{cases} = \mathfrak{S}_{\beta,1} + \mathfrak{S}_{\beta,2} + \mathfrak{S}_{\beta,3}, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}_{\beta,1}}{-2\tau \sin 2\varphi} = \\ (chC_1 - \cos \beta) \left[2J_1 shC_1 \right. \\ \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (G_i(sh2C_i - n^2 shC_i \right. \\ \left. + nchC_i)e^{-nci} \cos n\beta \right] + \\ + G_1(ch2C_i - 2chC_i \cos \beta + \cos 2\beta), \\ \frac{\mathfrak{S}_{\beta,2}}{2\tau \sin 2\varphi} = (chC_i - \cos \beta) \left[2J_2 shC_i \right. \\ \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (G'_2(sh2C_i + n^2 shC_i \right. \\ \left. - nchC_i)e^{-nci} \cos n\beta \right] + \\ + G_2(ch2C_i - 2chC_i \cos \beta + \cos 2\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}_{\beta,3}}{-2 \cos 2\varphi} = 4 \cdot (-1)^{i+1} (chC_i \\ - \cos \beta) \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 shC_i \\ - nchC_i) e^{-nci} \sin n\beta. \end{aligned}$$

Зокрема, якщо $C_1 = C_2 = C$, отримуємо розв'язок задачі про чистий зсув широкого плоского ізотропного стрижня із двома однаковими круговими отворами.

Розглянемо частковий випадок $\varphi = 2\pi$. Тоді після перетворень маємо для напружень на контурі:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\beta = 4\tau(chC - \cos \beta) \left\{ \frac{2shC \sin \beta (1 - chC \cos \beta)}{(chC - \cos \beta)^3} \right. \\ \left. + e^{-4c} sech 2c \sin \beta + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\beta}{sh 2nc - nsh 2c} e^{nc} [(n^2 shc - nchc)(e^{-2nc} - e^{-2c}) + n(2n^2 shc - ne^c + e^{-c})sh 2c] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Легко показати, що якщо $C \rightarrow \infty$, отримуємо з (6) випадок чистого зсуву стрижня з одним круговим отвором. У такому разі скористаємося формулою:

$$\cos \beta = \frac{1 + cha \cdot \cos \theta}{cha + \cos \theta}, \quad (7)$$

(при $\alpha \rightarrow \infty$, $\cos \beta \rightarrow \cos \theta$, $\beta \rightarrow \theta$), після перетворень отримаємо відомий результат [17]:

$$\mathfrak{S}_\theta = -4\tau \sin 2\theta. (8)$$

У табл. 1 наведено значення напружень \mathfrak{S}_β/τ на контурах отворів $\alpha = C_1$, $\alpha = -C_2$ за чистого зсуву і при співвідношеннях:

$$m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5; \frac{d_1 + d_2}{r_1 + r_2} = 1,5; \varphi = 10^\circ.$$

Таблиця 1. Значення напружень \mathfrak{S}_β/τ на контурах отворів ($m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5, \frac{d_1+d_2}{r_1+r_2} = 1,5, \varphi = 10^\circ$)

Table 1. Values stresses \mathfrak{S}_β/τ on the contour of the holes ($m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5, \frac{d_1+d_2}{r_1+r_2} = 1,5, \varphi = 10^\circ$)

Напруження \mathfrak{S}_β/τ на контурах					
$\alpha = -C_2$			$\alpha = C_1$		
θ°	$\mathfrak{S}_\beta/(-\tau) _{\alpha = -C_2}$		θ°	$\mathfrak{S}_\beta/\tau _{\alpha = C_1}$	
0°	1,85		0°	1,33	
15°	3,61	195° 0,30	15°	3,15	195° 0,85
30°	4,75	210° 2,42	30°	4,30	210° 2,98
45°	4,52	225° 3,51	45°	4,00	225° 4,09
60°	3,42	240° 3,81	60°	2,98	240° 4,30
75°	2,25	255° 2,61	75°	1,85	255° 3,15
90°	-0,20	270° 0,20	90°	-0,66	270° 0,66
105°	-2,61	285° -2,25	105°	-3,15	285° -1,85
120°	-3,81	300° -3,42	120°	-4,30	300° -2,98
135°	-3,51	315° -4,52	135°	-4,09	315° -4,00
150°	-2,42	330° -4,75	150°	-2,98	330° -4,30
165°	-0,30	345° -3,61	165°	-0,85	345° -3,15
180°	1,99	350° -1,85	180°	1,33	350° -1,33

Таблиця 2. Значення напружень \mathfrak{S}_β/τ на контурах отворів ($m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5, \frac{d_1+d_2}{r_1+r_2} = 2,5, \varphi = 10^\circ$)**Table 2.** Values stresses \mathfrak{S}_β/τ on the contour of the holes ($m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5, \frac{d_1+d_2}{r_1+r_2} = 2,5, \varphi = 10^\circ$)

Напруження \mathfrak{S}_β/τ на контурах					
$\alpha = -C_2$			$\alpha = C_1$		
θ°	$\mathfrak{S}_\beta/(-\tau \alpha = -C_2$		θ°	$\mathfrak{S}_\beta/\tau \alpha = C_1$	
0°	1,70		0°	1,69	
15°	3,50	195° 0,20	15°	3,39	195° 0,25
30°	4,20	210° 2,22	30°	4,15	210° 2,30
45°	4,10	225° 3,32	45°	4,05	225° 3,28
60°	3,20	240° 3,60	60°	3,15	240° 3,72
75°	2,01	255° 2,40	75°	-2,05	255° 2,38
90°	-0,01	270° 0,10	90°	-0,05	270° 0,08
105°	-2,40	285° -2,01	105°	-2,37	285° -2,10
120°	-3,52	300° -3,40	120°	-3,48	300° -3,35
135°	-3,20	315° -4,20	135°	-3,18	315° -4,25
150°	-2,20	330° -4,25	150°	-2,15	330° -4,15
165°	-0,20	345° -3,27	165°	-0,17	345° -3,30
180°	1,90	350° -1,72	180°	1,85	350° -1,75

У табл. 2 подано значення напружень \mathfrak{S}_β/τ на контурах отворів за чистого зсуву при співвідношеннях:

$$m = \frac{r_1}{r_2} = 1,5;$$

$$\frac{d_1 + d_2}{r_1 + r_2} = 2,5;$$

$$\varphi = 10^\circ.$$

Висновки. Наведено розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у широких стрижнях із двома нерівними круговими отворами за чистого зсуву. Правильність отриманого розв'язку перевірена на тестовій задачі для випадку чистого зсуву стрижня з одним круговим отвором. Дослідження і числові підрахунки показують, що концентрація напружень більша на контурі отвору меншого радіуса. Якщо віддаль між отворами збільшується, вплив меншого отвору на розподіл напружень біля отвору більшого радіуса зменшується. Так, наприклад, при віддалі між центрами отворів більше ніж $2,5 \times (r_1 + r_2)$, напруження біля меншого отвору майже не змінює напруженого стану біля отвору більшого радіуса.

Отримані результати дають змогу теоретично визначити коефіцієнт концентрації напруження в стрижнях із отворами і можуть бути використані в інженерній практиці під час проектування деталей у корабле-, авіа- та машинобудуванні.

Бібліографічний список

- Бейгул О. О., Лепетова Г. Л. Методи теорії пружності для дослідження і розрахунків металургійного обладнання: навч. посіб. Дніпродзержинськ: Дніпродзерж. держ. техн. ун-т, 2014. 188 с.
- Вакуленко С. В., Калоеров С. А. Наближений метод визначення напруженого стану багатозв'язаної ізотропної півплощини з отворами і тріщинами. *Теоретична і прикладна механіка*. 2002. Вип. 35. С. 65-76.
- Гарт Е., Семенча О. Скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями. *Сучасні проблеми механіки та математики – 2023: матеріали Міжнародної наукової конференції* (м. Львів, 23-25 травня 2023р.): Львів: ІППММ, 2023. С. 173-174.
- Довбня К., Врублевський В. Дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та тріщиною. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 33-35.
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрація напружень в багатозв'язних ізотропних пластинах. *Донецьк: Донецьк, нац. ун-т, 2013. 440 с.*
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В. Напружений стан гірського масиву з виробітками поблизу загруженої денної поверхні. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія гірничо-електро-механічна*, 2004. Вип. 83. С. 129-134.
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В. Напружений стан гірського масиву з виробітками поблизу загруженої денної поверхні. *Деформації та руйнування матеріалів з дефектами і динамічні явища в гірських породах і виробітках: зб. наук. праць X Міжнар. наук. школи,*

м.Алушта, 18-24 вересня 2000р., Сімферополь, 2000. С. 60-62.

8. Калоеров С. А., Вакуленко С. В. Розв'язок циклічної задачі для пластинки з отворами і тріщинами і її застосування в гірничій справі. *Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки*. 2004. № 1. С. 37-42.

9. Калоеров С. А. Наближений метод дослідження напруженого стану ізотропної півплощини і смуги з отворами і тріщинами. *Теоретична і прикладна механіка*. 2004. Вип. 39. С. 83-93.

10. Калоеров С. А. Розв'язування основних задач теорії пружності для півплощини з отворами і тріщинами. *Теоретична і прикладна механіка*. 1998. Вип. 28. С. 157-171.

11. Кравець В. Напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 44-47.

12. Онишко Л. Й., Варивода Ю. Ю., Пономаренко О. М. Дослідження динамічної концентрації напружень на краю колового отвору за дії на нього неосесиметричного навантаження. *Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С. З. Гжицького*. 2011. 13, № 4 (50), ч. 4. С. 106-114.

13. Пономаренко О. Напруження в безмежній тонкій пластині з круговим включенням і круговим отвором: *Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»* / за заг.ред. Р.М. Кушніра і Ю.В.Токового. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2024. Вип.6. С.137-138.

14. Пономаренко О., Семерак В., Гавриляк О. Концентрація напружень в пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під кутом до лінії центрів отворів. *Вісник Львівського національного університету природокористування «Агроінженерні дослідження»*. 2022. № 26. С. 77-90.

15. Пономаренко О., Бурнаєв О., Семерак В., Гавриляк О. Розподіл напружень в півплощині з круговим отвором при розтягу під кутом до прямолінійного краю. *Вісник Львівського національного університету*

природокористування «Агроінженерні дослідження». 2024. № 28. С. 65-74.

16. Проценко В., Українець Н. Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 85-87.

17. Савин Г. Н. Розподіл напружень біля отворів. Київ: Наукова думка, 1968. 887 с.

18. Слободян М., Цуркан М. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 96-98.

19. Сучасні проблеми концентрації напружень : праці Міжнар. наук. конф, присвяченої 75-річчю академіка НАН України А. С. Космодам'янського (м. Донецьк, 21-25 червня 1998 р.). Донецьк, 1998. 287 с.

20. Соляр Т., Максимович О. Регуляризація формули обернення перетворення Лапласа стосовно вивчення концентрації динамічних напружень у пластинках з отворами. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 161-163.

21. Сучасні проблеми механіки і математики: праці Міжнар. наук. конф., присвяч. 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018.

22. Тужеляк О. Вплив зміни напрямку ортотропії на динамічну поведінку пластини з отворами за дії розподіленого навантаження на її поверхні: *Збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»* / за заг.ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2024. Вип.6. С.169-170.

23. Шопа Т. Дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин з отворами та включеннями. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф.* (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 168-169.

Стаття надійшла 03.02.2025