

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СПОСОБІВ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРУВАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІОВАЛЬНИХ РЕГУЛЯТОРІВ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Ярослав Марущак, д. т. н., Іван Дробот, Дмитро Гречин, к. т. н.

*Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: ya.marushchak@gmail.com; dim39.2017@gmail.com*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.112-116>

Марущак Я., Дробот І., Гречин Д. Порівняльний аналіз способів реалізації інтегрувально-диференціовальних регуляторів дробового порядку

На сучасному етапі для моделювання дробових диференціовальних та інтегрувальних ланок в електромеханічних системах використовують пакет NINTEGER. Застосування спеціально розробленого пакету NINTEGER як додатка для пакету MATLAB Simulink дало змогу виконувати перші дослідження у сфері застосування регуляторів дробового порядку в системах автоматичного керування дробового порядку. Але йому властиві певні недоліки: пакет NINTEGER працює виключно в середовищі MATLAB Simulink і застосувати його за межами цього пакету неможливо; із літературних джерел невідома точність представлення дробових ланок та ПІД регуляторів дробового порядку моделями у цьому пакеті.

У роботі здійснено порівняльний аналіз математичних моделей на основі відомого перетворення Оусталоупа у програмному середовищі MATLAB з можливістю його використання в MATLAB Simulink замість додатка NINTEGER. Досліджено точність моделей інтегрувальних і диференціовальних регуляторів дробового порядку у представленні Оусталоупа, Рімана, Рімана-Ліувіля і Грюнвальда-Летнікова порівняно з моделлю, отриманою за перетворенням Лапласа, як еталонною. На основі проведеного аналізу дійдено висновку, що найбільш перспективним для реалізації регуляторів є моделі, побудовані на основі перетворення Оусталоупа. Моделі Оусталоупа дозволяють замінити передавальні функції дробового порядку еквівалентними передавальними функціями цілого порядку. Завдяки цьому забезпечується значно вища швидкодія відпрацювання керуючих впливів порівняно з моделями Грюнвальда-Летнікова. Щодо точності, то вона дещо гірша, але цей недолік компенсується простотою обчислювальної процедури.

Ключові слова: моделі, перетворення Лапласа, перетворення Оусталоупа, передавальна функція дробового порядку, регулятори дробового порядку.

Marushchak Ya., Drobot I., Hrechyn D. Comparative analysis of the methods for implementing fractional-order integrator-differentiator controllers

At the present stage, the NINTEGER package is used for modeling fractional differential and integral elements in electromechanical systems. The application of the specially developed NINTEGER package as an add-on for the MATLAB Simulink package has enabled the first studies in the field of using fractional-order controllers in fractional-order automatic control systems. However, it has certain drawbacks: the NINTEGER package works exclusively in the MATLAB Simulink environment and cannot be used outside this package. The literature does not clarify the accuracy of representing fractional elements and fractional-order PID controllers in this package.

The work presents a comparative analysis of mathematical models based on the well-known Oustaloup transformation in the MATLAB programming environment with the possibility of its use in MATLAB Simulink instead of the NINTEGER application. In addition, a study was conducted on the accuracy of integral and differential regulators of fractional order represented in the Oustaloup, Riemann, Riemann-Liouville, and Grünwald-Letnikov forms compared to the model obtained through the Laplace transformation as a benchmark. Based on the conducted analysis, it is concluded that the models built on the Oustaloup transformation are the most promising for the implementation of regulators. Oustaloup models allow replacing fractional order transfer functions with equivalent transfer functions of integer order. This provides significantly higher performance in processing control influences compared to Grünwald-Letnikov models. Regarding accuracy, it is somewhat worse, but this drawback is compensated for by the simplicity of the computational procedure.

Keywords: models, Laplace transform, Oustaloup transform, fractional order transfer function, fractional order controllers.

Постановка проблеми. На сучасному етапі для моделювання дробових диференціовальних та інтегрувальних ланок в електромеханічних системах використовують пакет NINTEGER. Застосування спеціально розробленого пакету NINTEGER як додатка для пакету MATLAB Simulink дало змогу виконувати перші дослідження у сфері застосування регуляторів дробового порядку в

системах автоматичного керування САК з об'єктами керування дробового порядку. Але йому властиві певні недоліки: пакет NINTEGER працює виключно в середовищі MATLAB Simulink і застосувати його за межами цього пакету неможливо; із літературних джерел невідома точність представлення дробових ланок та ПІД регуляторів дробового порядку моделями у даному пакеті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Нині дробове числення перебуває у процесі розвитку і в теоретичному плані, і в його застосуванні. Цей розділ матаналізу перетворився на інструмент математичного моделювання складних динамічних процесів у звичайних і фрактальних середовищах, який дозволяє на новій основі вирішувати різні задачі аналізу, синтезу, ідентифікації, діагностики, створення нових систем керування тощо [1; 3; 7]. Пониження порядку моделі стало останніми роками цікавою сферою досліджень, завдяки зростанню важливості синтезу для систем керування з дробовими регуляторами на основі контролерів [2], використовуючи різні стратегії. Водночас особливу увагу треба звертати на запобігання втрати найбільш важливих динамічних особливостей системи.

У сучасних літературних джерелах є різні підходи до реалізації інтегрально-диференціальних регуляторів дробового порядку, використовуючи різні моделі. Вони базуються на різних описах інтегрально-диференціальних ланок [3; 5; 6]. Основними формами дробового інтегрування є конструкції, запропоновані Ліувіллем і Ріманом. Розвиваючи теорію Ліувілля, Грюнвальд ввів поняття дробової похідної як границі різнищевих відношень. Представлення Рімана-Ліувілля передбачає, що функція спочатку диференціюється з найменшим цілим порядком n , який перевищує нецілий порядок j , а потім інтегрується з порядком $n - j$. Як показав досвід синтезу дробових регуляторів, для електромеханічних систем [6] нецілий порядок диференціовальної складової не перевищує $j = 1$. Розвиток і корекція цієї теорії в царині електротехніки належить Хевісайду, Н. Вінеру та Дж. Карлсону.

Постановка завдання. Наше завдання – отримання числових значень точності відомих моделей інтегральних і диференціальних ланок дробового порядку для вироблення рекомендації щодо їх застосування під час реалізації відповідних регуляторів на базі мікроконтролерів.

Виклад основного матеріалу. Згадані недоліки пакету NINTEGER спонукали проаналізувати моделі у програмному середовищі MATLAB на основі відомих формул перетворення Оусталоупа, за використання яких інтегральний (s^{-a}) і диференціальний (s^{+a}) регулятори дробового порядку можна представити [4] виразом

$$s^{\pm a} = \frac{\omega_u \prod_{k=1}^a (1 + s/\omega_k)}{\omega_h \prod_{k=1}^a (1 + s/\omega_k)}, \quad (1)$$

де: $\omega_u = \sqrt{\omega_l \omega_h}$, N – порядок апроксимації (представлення), яким слід задатися; ω_k, ω_k – нулі та полюси еквівалентної передавальної функції (ПФ) цілого порядку, відповідно; $[\omega_l, \omega_h]$ – нижня і верхня межі зміни частоти.

Розраховані згідно з (1) значення нулів, полюсів та коефіцієнта підсилення апроксимуючої ПФ цілого порядку для $N=1,2,\dots,5$ були імплементовані в середовище MATLAB Simulink і забезпечили такі переваги порівняно з пакетом NINTEGER:

- розроблені моделі ланок доступні для використання не тільки в середовищі MATLAB Simulink, але і в програмному середовищі MATLAB;
- структура і параметри апроксимуючої ПФ за використання перетворення Оусталоупа відображаються в пам'яті MATLAB, що спрощує їх перегляд, дослідження і перевірку.

На рис. 1 і 2 показано перехідні функції розроблених моделей інтегрального і диференціального регулятора нецілого порядку в пакеті NINTEGER (крива 1) і за використання перетворення Оусталоупа порядку $N=3,4$ ($N=3$ – крива 2, $N=4$ – крива 3) з ПФ $s^{0.5}$ і $s^{-0.5}$, відповідно. Дослідження, проведені в [4] щодо можливостей апроксимації регуляторів дробового порядку передавальними функціями цілого порядку, показали, що представлення диференціального регулятора дробового порядку в пакеті NINTEGER із високим порядком апроксимації $N=5$ збігається за перехідними функціями з перетворенням Оусталоупа з порядком апроксимації вище ніж $N \geq 2$.

Щодо інтегральної ланки, то в перехідних функціях, отриманих за використання перетворення Оусталоупа (1), у зв'язку з рівністю порядків поліномів чисельника і знаменника є скачок, який не властивий інтегральному регулятору, тобто є суттєва неточність представлення на початковій ділянці перехідної функції. Для усунення цього ми запропонували модифікацію методу Оусталоупа для апроксимації ПФ дробового порядку ПФ цілого порядку, в якій порядок поліному чисельника зменшено на одиницю. Для дослідження точності такого представлення було проведено дослідження можливості нехтування одним нулем в отриманій ПФ цілого порядку шляхом пониження порядку полінома чисельника на одиницю або вилучення з нього елемента (доданка) з найвищим степенем

оператора s . Результати досліджень показали перевагу другого підходу (див. рис. 1, крива 4). Проте відкритим залишалося питання точності моделі Оусталоупа, адже порівняння проведені з результатами, отриманими в пакеті NINTEGER, які працюють тільки в середовищі MATLAB Simulink, де гіпотетично вони реалізовані. Тому для перевірки точності моделі Оусталоупа був здійснений наступний крок досліджень – пошук еталонних перехідних функцій інтегрального і диференціального регулятора. Враховуючи, що у перетворенні Лапласа відсутні процедури інтегрування і диференціювання, то перехідні функції, що розраховуються засобами аналітики такого перетворення, можна вважати найбільше наближеними до еталонних. Для підтвердження цього доцільно провести порівняння, отриманих в Mathcad, перехідних функцій за використання перетворення Лапласа з аналогічними перехідними функціями, отриманими в пакеті NINTEGER і за використання перетворення Оусталоупа з порядком апроксимації $N=3,4$, а також з його модифікацією для інтегровальної ланки.

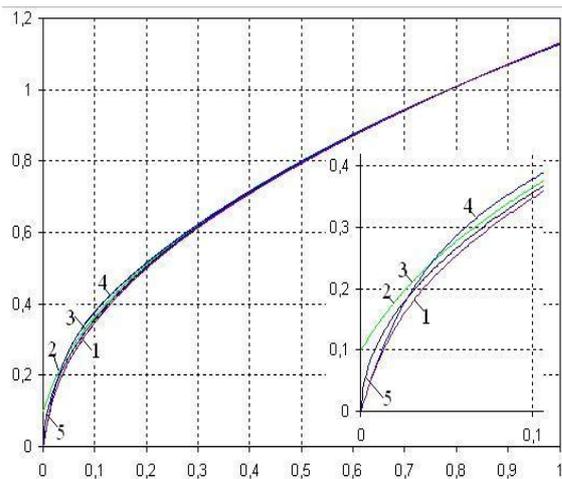


Рис. 1. Перехідні функції реалізації розроблених моделей інтегровального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{-0.5}$ в пакеті NINTEGER (крива 1) і на основі перетворення Оусталоупа порядку $N=3,4$ (криві 2, 3), модифікованого перетворення Оусталоупа порядку $N=3$ (крива 4) та перетворення Лапласа в пакеті Mathcad (крива 5)

Fig. 1. Transition functions of the implementation of the developed models of the fractional-order integrator controller with PF $s^{-0.5}$ in the NINTEGER package (curve 1) and based on the Oustaloup transform of order $N=3.4$ (curves 2, 3), the modified Oustaloup transform of order $N=3$ (curve 4) and the Laplace transform in the Mathcad package (curve 5)

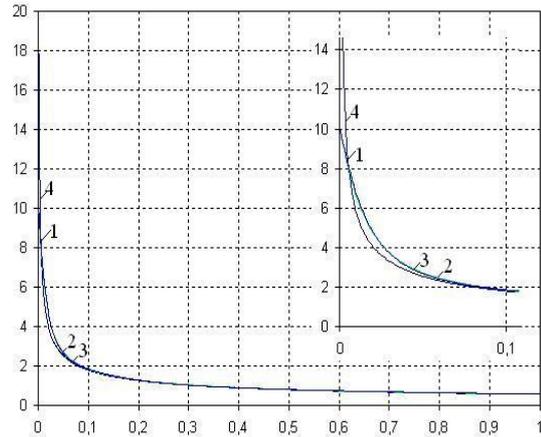


Рис. 2. Перехідні функції реалізації моделей диференціального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{0.5}$ в пакеті NINTEGER (крива 1), на основі перетворення Оусталоупа порядку $N=3,4$ (криві 2, 3) та перетворення Лапласа в пакеті Mathcad (крива 4)

Fig. 2. Transition functions of the implementation of models of a fractional-order differential regulator with a PF $s^{0.5}$ in the NINTEGER package (curve 1), based on the Oustaloup transform of order $N=3.4$ (curves 2, 3) and the Laplace transform in the Mathcad package (curve 4)

Використавши відоме табличне обернене перетворення Лапласа, відображення дробового інтегровального регулятора з ПФ $s^{-\alpha}$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha}} \right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2)$$

де Γ – гамма-функція, здійснюємо інтегрування його за часом

$$I(t) = \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \times \alpha} + C. \quad (3)$$

Аналогічно, використавши табличне обернене перетворення Лапласа, відображення дробового диференціального регулятора з ПФ s^{α} . Тоді у правій частині виразів (2)-(3) α замінюється на $-\alpha$.

На рис. 1, 2 показано розраховані за такими моделями перехідні функції (реакція на одиничний сигнал) інтегровального і диференціального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{-0.5}$ (див. рис.1, крива 5 і $s^{0.5}$ рис. 2, крива 4, відповідно). Отримані ці перехідні функції інтегровального і диференціального регулятора дробового порядку приймаємо за еталонні для дослідження точності інших моделей.

Для отримання оцінки точності апроксимації застосуємо:

- абсолютне середньоквадратичне відхилення, що розраховується за виразом

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{ie})^2},$$

де y_i – значення досліджуваної перехідної функції в i -й точці; y_{ie} – значення еталонної перехідної функції ланки в i -й точці; $n=1001$ – кількість точок дискретизації перехідної функції;

- відносна похибка апроксимації перехідної функції (для інтегрувального регулятора), яка отримується за виразом:

$$d = \frac{s}{y_y} \times 100\% ;$$

де: y_y – усталене значення перехідної функції досліджуваної ланки при $t=1c$.

З метою пошуку раціонального варіанта моделей для реалізації цифрових інтегрувального і диференціального регуляторів дробового порядку було також проведено дослідження їх динамічних властивостей за використання представлень: Рімана, Рімана-Ліувілля і Грюнвальда-Летнікова, а також отримання оцінок точності збігу їх перехід-

них функцій із перехідними функціями, отриманими за використання перетворення Лапласа на основі моделі (3) для двох різних знаків α .

Результати оцінки точності апроксимації інтегрувальної та диференціальної ланок дробового порядку за їх представлення моделями в пакеті NINTEGER і на основі перетворення Оусталоупа у порівнянні з моделлю, отриманою за перетворенням Лапласа як еталонною, наведені в табл.

Були також розраховані перехідні функції для інтегрувального регулятора дробового порядку у представленні Рімана

$$D^{-\nu} f(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + C(t), \quad (4)$$

і диференціального регулятора дробового порядку у представленні Рімана-Ліувілля [5]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}. \quad (5)$$

Таблиця. Результати оцінки точності апроксимації інтегрувальної та диференціальної ланок дробового порядку

Table. Results of the estimation of the approximation accuracy of the integrating and differentiating links of the fractional order

ПФ ланки	Представлення моделей ланок											
	Ninteger		Рімана		Рімана-Ліувілля		Грюнвальда-Летнікова		Оусталоупа			
									N=3		N'=3 (мод)	
	s	d, %	s	d, %	s	d, %	s	d, %	s	d, %	s	d, %
$S^{-0.5}$	0,00648	0,5731	$8 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	-	-	0,00572	0,506	0,00699	0,6201	0,008773	0,778
$S^{0.5}$	0,3147	-	-	-	$1,57 \cdot 10^{-7}$	-	0,07094	-	0,3135	-	-	-

Проведені розрахунки згідно з (4)-(5) показали високу точність цих методів (див. таблицю), але виявили такі проблеми:

- права межа інтегрування для виразів (4) і (5) дає ділення на «0»;

- розрахунок кожної наступної точки перехідного процесу інтегральної дробової ланки вимагає наявності всіх попередніх значень підінтегрувальної функції (вхідного сигналу процесу) починаючи з 0, тому кожна наступна точка вимагає більшого об'єму обчислень і, тим самим, зростає завантаження процесора.

Тривалість розрахунку перехідного процесу інтегрувального регулятора за моделлю Рімана і диференціального регулятора дробового порядку за моделлю Рімана-Ліувілля залежить від кроку інтегрування та потужності контролера.

Перехідні функції інтегрувального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{-0.5}$ у представленні Рімана і диференціального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{0.5}$ у представленні Рімана-Ліувілля показані на рис. 3 і рис. 4 (крива 2). Для порівняння на рис. 3 і рис. 4 (крива 1), відповідно, наведені також перехідні функції, отримані за використання зворотного перетворення Лапласа, які вважаємо еталонними.

У літературних джерелах, зокрема [5], присвяченим реалізації дробових регуляторів, найчастішими є посилання до моделі інтегродиференціального регулятора дробового порядку з ПФ $s^{\pm\alpha}$ у представленні Грюнвальда-Летнікова

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{e} - a \hat{u}}{\hat{e} h \hat{u}} \hat{a} (-1)^j \left(\frac{\alpha}{j}\right) f(t-jh)$$

Перевагами такого представлення є:

- формула проста у використанні, тому що записана на основі скінченної суми, а не інтегралу;
- модель за представлення інтегровально-диференціовальних регуляторів формулою Грюнвальда-Летнікова забезпечує вищу, порівняно з наведеними вище моделями, швидкість обчислень;
- для представлення інтегровального чи диференціовального регулятора дробового порядку використовується одна і та ж формула, змінюється лише знак дробового порядку («+» для диференціатора, «-» для інтегратора).

Основним недоліком цієї моделі є те, що розрахунок перехідного процесу інтегровального чи диференціовального регулятора дробового порядку ускладнюється наявністю у формулі гама-функцій, намагання збільшення точності визначення яких збільшує час розрахунку перехідного процесу.

Були розраховані перехідні функції інтегровального з ПФ $s^{-0.5}$ і диференціовального з ПФ $s^{0.5}$ регуляторів дробового порядку, що розраховані у пакеті Mathcad у представленні Грюнвальда-Летнікова. Виявилось, що в перехідній функції інтегрального регулятора як і у випадку перетворення Оусталоупа (1), є скачок, який не властивий інтегральній ланці, тобто є її неточність представлення на початковій ділянці перехідної функції.

Результати оцінки точності апроксимації моделей інтегровального на основі інтеграла Рімана та диференціовального на основі диференціала Рімана-Ліувілля, а також інтегровального та диференціовального регуляторів дробового порядку в представленні Грюнвальда-Летнікова, у порівнянні з моделлю, отриманою за перетворенням Лапласа як еталонною, наведено в таблиці.

Висновки. 1. Найвищу ступінь збігу з еталонними, для інтегровального регулятора дробового порядку, забезпечує перетворення на основі представлення Рімана (середньоквадратичне відхилення перехідної функції становить $S = 8 \cdot 10^{-8}$ або $d = 7,1 \cdot 10^{-6} \%$ до усталеного значення при $t = 1c$), а

для диференціовального регулятора дробового порядку – Рімана-Ліувілля (середньоквадратичне відхилення перехідної функції становить $S = 1,57 \cdot 10^{-7}$)

2. Моделі інтегровального та диференціовального регуляторів дробового порядку на основі перетворення Грюнвальда-Летнікова мають вищу швидкодію порівняно з моделями Рімана і Рімана-Ліувілля, простішу реалізацію, проте поступаються їм у точності.

3. Найбільш перспективним для реалізації регуляторів є моделі, побудовані на основі перетворення Оусталоупа, які забезпечують значно вищу швидкодію порівняно з моделями Грюнвальда-Летнікова, лише незначно поступаються їм за точністю, що компенсується простотою обчислювальної процедури.

Бібліографічний список

1. Васильев В.В., Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008. 256 с.
2. Марушак Я. Ю., Копчак Б. Л., Копчак Л. С. Регулятори дробового порядку в системах підпорядкованого регулювання напруги автономного асинхронного генератора. *Вісник НУЛП «Електроенергетичні та електромеханічні системи»*. 2013. № 763. С. 76–80.
3. Dzieliński, a., Sierociuk d., Sarwas G. Some applications of fractional order calculus. *bulletin of polish academy of sciences. Warsaw. technical sciences*. 2010. vol. 58 (4). P. 583–592.
4. Marushchak Y., Mazur D., Kwiatkowski B., Kopchak B., Kwater T., Koryl M. Approximation of Fractional Order $pi^lambda d^mu$ -Controller Transfer Function Using Chain Fractions. *Energies*. 2022. № 15. P. 4902.
5. Mehdi Dalir. Application of fractional calculus. *Applied Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 4. № 21. P. 1021–1032.
6. Podlubny I. Fractional Differential Equations/Mathematics in Science and Engineering. 1999. Vol. 198. Academic Press. 340 p.
7. Fortuna, L., Graziani S., Muscato G., Nunnari G., Porto D. Approximation of High-Order Lumped Systems by using Non-Integer Order Transfer Functions. *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99)*, 1999. P. 2222–2230.

Стаття надійшла 10.02.2025