

ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНІ КОМПЛЕКСИ ТА СИСТЕМИ  
В АГРОПРОМИСЛОВОМУ ВИРОБНИЦТВІ

УДК 621.313.333

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СХЕМ ЗАМІЩЕННЯ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КРАЙОВИХ  
УМОВ ДО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДОВГОЇ ЛІНІЇ

*Віталій Левонюк, к. т. н., Дмитро Гречин, к. т. н.,  
Тарас Михайлович, к. т. н.*

*Львівський національний університет природокористування,  
вул. В. Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,  
e-mail: vitaliy\_levoniuk@ukr.net*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.94-104>

**Левонюк В., Гречин Д., Михайлович Т. Порівняльний аналіз схем заміщення для ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії**

У статті запропоновано методику ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії, яка ґрунтується на застосуванні схем заміщення крайових дискретних ділянок лінії електропередачі. Основна увага зосереджена на порівняльному аналізі трьох типів схем –  $\Gamma$ -,  $T$ - та  $\Pi$ -схем – з метою дослідження впливу їхньої топології та симетрії на точність чисельного моделювання перехідних електромагнітних процесів у лініях із розподіленими параметрами. Математична модель побудована на основі хвильового (телеграфного) рівняння з частинними похідними другого порядку, яке описує динаміку напруги та струму вздовж лінії. Крайові умови Неймана та Робена-Пуанкаре формуються за допомогою врахування параметрів схем заміщення в аналітичному вигляді. Особливу увагу приділено дослідженню асиметрії, яка виникає під час застосування  $\Gamma$ -схеми: показано, що така схема спричиняє порушення умов суперпозиції хвиль та залежність результатів від напрямку живлення. У протилежність цьому,  $T$ - та  $\Pi$ -схеми забезпечують симетричне навантаження моделі та стабільність розрахункових результатів. Проведено числові експерименти в середовищі *Intel Visual Fortran Compiler*, які підтвердили наявність похибки при застосуванні  $\Gamma$ -схеми та точність  $T$ - і  $\Pi$ -схем. Наукова новизна роботи полягає у вперше запропонованому підході до ідентифікації крайових умов хвильового рівняння на основі схем заміщення дискретних ділянок лінії з оцінкою їх симетрії та впливу на точність моделювання. Запропонована методика є універсальною та може бути застосована під час моделювання як високовольтних ліній постійного, так і змінного струму, що підвищує її наукову та інженерну цінність. Представлений підхід дає змогу покращити роботу наявних програм електромагнітних розрахунків, забезпечуючи вищу стабільність обчислень та узгодженість крайових умов для складних режимів.

**Ключові слова:** схема заміщення, довга лінія, крайові умови,  $\Gamma$ -схема,  $T$ -схема,  $\Pi$ -схема, ідентифікація.

**Levoniuk V., Hrechyn D., Mykhailovych T. Comparative analysis of equivalent circuit models for boundary condition identification in the wave equation of a long transmission line**

This paper proposes a methodology for identifying boundary conditions for the wave equation of a long transmission line, based on the use of equivalent circuits for the terminal discrete sections of the line. The main focus is made to the comparative analysis of three types of substitution schemes –  $\Gamma$ -,  $T$ -, and  $\pi$ -equivalent circuits – in order to investigate how their topology and symmetry affect the accuracy of numerical modeling of transient electromagnetic processes in lines with distributed parameters. The mathematical model is built upon the wave (telegraph) equation with second-order partial derivatives, which describes the dynamics of voltage and current along the line. Neumann and Robin–Poincaré boundary conditions are shaped analytically by incorporating the parameters of the equivalent circuits. Particular attention is given to the asymmetry arising from the use of the  $\Gamma$ -scheme. It is demonstrated that this scheme disrupts wave superposition, resulting in outcomes that vary depending on the direction of line energization. In contrast, the  $T$ - and  $\pi$ -schemes ensure symmetric loading of the model, leading to stable computational outcomes. Numerical experiments carried out in *Intel Visual Fortran Compiler* confirm the presence of systematic errors in the  $\Gamma$ -scheme and the accuracy of the  $T$ - and  $\pi$ -schemes. The scientific novelty lies in the first-time proposal of a boundary condition identification approach for the wave equation based on equivalent circuit with symmetry evaluation and accuracy analysis. The proposed methodology is universal and can be applied to the modelling of high-voltage transmission lines operating under both direct and alternating current, which enhances its scientific and engineering value. The presented approach makes it possible to improve the performance of existing electromagnetic simulation tools by ensuring higher computational stability and consistent boundary-condition formulation under complex operating regimes.

**Keywords:** equivalent circuit, long transmission line, boundary conditions,  $\Gamma$ -equivalent circuit,  $T$ -equivalent circuit,  $\pi$ -equivalent circuit, identification.

**Постановка проблеми.** Математичне моделювання нестационарних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередачі є ключовим інструментом для аналізу динаміки сучасних електроенергетичних систем. Особливого значення набувають підходи, які ґрунтуються на методах електромагнітного поля, що дають змогу точно враховувати розподілені параметри ліній. На відміну від колових схем заміщення, польові методи забезпечують більш адекватне відображення хвильових явищ, особливо в умовах нестабільності режимів та високих напруг, що підтверджується як літературними джерелами [4; 10], так і практичним досвідом авторів.

У працях [5; 11] обґрунтовано переваги застосування рівнянь довгої лінії з частинними похідними, які дають змогу з високою точністю описувати хвильові процеси, зокрема явища рефлексії, атенуації та дисперсії. Такі ефекти є критичними під час дослідження перехідних процесів, викликаних короткими замиканнями, комутаціями чи атмосферними перенапругами.

У рамках проведених досліджень авторським колективом здійснюється математичне моделювання електромагнітних процесів у повітряних лініях електропередачі великої протяжності з використанням сучасних чисельних методів. Основна увага приділяється підвищенню точності і стабільності обчислень, що є важливою передумовою для надійного функціонування енергосистем та вдосконалення засобів їхнього аналізу.

Теоретичною основою побудови математичних моделей слугує рівняння довгої лінії з частинними похідними другого порядку:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_0 g_0 + r_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} + r_0 g_0 u. \quad (1)$$

Рівняння (1) у науковій літературі часто називають телеграфним рівнянням або хвильовим рівнянням довгої лінії [13]. Його можна отримати кількома методами – як класичними, які ґрунтуються на топологічних (колових) підходах із використанням законів Кірхгофа, так і неklasичними, зокрема із застосуванням загальних законів електродинаміки (закону електромагнітної індукції та закону збереження заряду), або ж з використанням варіаційних принципів.

У статті детальний аналіз виведення рівняння не розглядатиметься, оскільки він виходить за рамки поставлених завдань.

Хвильове рівняння довгої лінії (1) тісно пов'язане з континуумною моделлю лінії електропередачі, оскільки воно описує електромагнітні процеси в лінії як у неперервному середовищі з

розподіленими параметрами. Завдяки цьому властивості лінії розглядаються без поділу на окремі елементи, що дає змогу точно моделювати динаміку напруги та струму як хвильових процесів, які поширюються у просторі й часі, враховуючи взаємодію параметрів по всій довжині лінії.

Як узагальнену координату в рівнянні (1) вибрано функцію напруги, хоча відомо, що аналогічні рівняння можна сформулювати і для струму або навіть для розподілу електричного заряду [10]. З метою подальших розрахунків та спрощення викладу матеріалу перепишемо рівняння (1) у такому вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (L_0 C_0)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (L_0 g_0 + r_0 C_0) v - r_0 g_0 u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v. \quad (2)$$

Як крайові умови для розв'язку рівняння (2) ми зазвичай використовуємо крайові умови Неймана та Робена-Пуанкаре. Для використання згаданих крайових умов першу й останню дискретні ділянки лінії ми представляємо у коловому вигляді, із використанням  $\Gamma$ -подібної схеми заміщення. Відтак виникає питання точності застосування такого підходу, оскільки використання  $\Gamma$ -схеми для заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії робить її несиметричною відносно її кінців, а отже, і просторовий розподіл напруг та струмів у лінії буде представлено з деякою похибкою. Ми вирішили детальніше розібратися в цьому питанні і здійснити відповідні дослідження з використанням числових експериментів.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Літературний пошук у відкритих наукометричних базах показав, що наукові публікації, присвячені застосуванню схем заміщення першої та останньої дискретних ділянок для ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії, практично відсутні. Натомість існують роботи, дотичні за тематикою, проте їх кількість обмежена. Розглянемо деякі з них.

У статті [3] проаналізовано різні математичні моделі високовольтних ліній електропередачі для оцінки розподілу струмів короткого замикання в заземлювальних системах опор. Основну увагу приділено точності моделей із різним рівнем спрощення. Автори порівнюють мультифазну модель, побудовану на основі  $\Pi$ -схеми, з декількома спрощеними моделями на основі  $T$ -схеми заміщення дискретних ділянок. Результати дали змогу виявити похибки, які виникають унаслідок таких спрощень.

У праці [2] запропоновано регресійні моделі для  $T$ -схеми заміщення середніх за довжиною ліній електропередачі напругою 154 кВ на основі

параметричних симуляцій, виконаних у середовищі *ANSYS Electronics Twin Builder*. Досліджено вплив параметрів лінії (довжина, опір, індуктивність, ємність) на перебіг електромагнітних процесів. Запропонований підхід дає змогу уникнути складностей класичних розрахунків параметрів ліній завдяки використанню параметричних симуляцій.

Автори статті [8] зосереджують увагу на числових характеристиках моделей ліній електропередачі із зосередженими параметрами, зокрема для безвтратних ліній. Розглянуто можливості усунення числових осциляцій, які виникають у процесі моделювання. Запропоновано стабільний числовий алгоритм для підвищення точності розрахунків. Досліджено динамічну поведінку моделей, побудованих на основі  $P$ -,  $T$ - та  $G$ -схем заміщення, із застосуванням таких чисельних методів, як метод трапецій, неявний метод Ейлера та багатокрокові методи.

Праця [6] присвячена формалізації моделей ліній електропередачі на основі параметрів  $ABCD$  за допомогою інструмента *HOL Light* для формальної верифікації.  $ABCD$ -матриці використано для математичного опису чотириполісників, які репрезентують лінії. Формалізовано моделі коротких та середніх за довжиною ліній у вигляді  $P$ - та  $T$ -схем, а також каскадних структур. Автори підкреслюють важливість формальної верифікації для побудови точних і надійних моделей, особливо в критичних застосуваннях енергетики та бездротової передачі енергії.

У монографії [7] детально висвітлено фізичну природу й математичну інтерпретацію комплексного параметра поширення  $\gamma$ , яке використовується у хвильовому рівнянні довгої лінії. Цей параметр представлено у вигляді суми коефіцієнта атенюації  $\alpha$  та фазового коефіцієнта  $\beta$ , які описують відповідно атенюацію і фазовий зсув електромагнітної хвилі при її поширенні. Зазначено, що навіть незначні порушення симетрії або точності моделювання, особливо щодо крайових умов, можуть суттєво вплинути на значення параметра  $\gamma$ , що чергово призводить до похибок у відтворенні напруг і струмів лінії. Це підтверджує потребу глибшого аналізу крайових умов, зокрема із застосуванням схем заміщення, задля підвищення точності чисельного моделювання.

Аналіз наявних джерел свідчить, що застосуванню  $P$ -,  $T$ - та  $G$ -схем заміщення для побудови математичних моделей електропередачі приділено значну увагу в контексті вдосконалення чисельних методів, формальної верифікації та підвищення точності моделювання. Проте використання таких схем саме для ідентифікації крайових умов до

хвильового рівняння довгої лінії залишається недостатньо дослідженим. Це вказує на наукову новизну та актуальність подальших розробок у цьому напрямі.

**Постановка завдання.** Враховуючи викладене, метою роботи є обґрунтування доцільності застосування схем заміщення для ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії, а також аналіз впливу топології та симетрії  $G$ -,  $T$ - і  $P$ -схем крайових дискретних ділянок на точність відтворення просторового розподілу напруг і струмів у моделі довгої лінії, описаній рівнянням з частинними похідними другого порядку.

**Виклад основного матеріалу.** Для здійснення числових експериментів і проведення порівняльного аналізу їхніх результатів нам потрібно розробити досліджувані математичні моделі лінії електропередачі. Ми вже неодноразово здійснювали побудови математичних моделей подібного плану, ознайомитися з якими можна, наприклад, у наших працях [1; 9], тому не будемо дуже детально розглядати побудову математичних моделей, а висвітлимо лише ключові етапи цієї процедури. Також для спрощення й полегшення розуміння евентуальному читачеві ми здійснюватимемо дослідження на об'єктах, які представлені в однолінійному виконанні.

Для проведення аналізу обрано лінію електропередачі постійного струму. Такий вибір зумовлений низкою чинників, які значно спрощують аналіз та підвищують точність обчислень. У системах постійного струму, на відміну від змінного, виключається необхідність обчислення діючих значень напруг і струмів, що істотно знижує складність математичного моделювання. Це дає змогу зосередитися на координатах усталеного режиму роботи, уникаючи надлишкових обчислювальних витрат.

Наперед варто відзначити, що аналіз будемо здійснювати для моменту часу усталеного режиму роботи лінії. Оскільки сталі часу для  $G$ -,  $T$ - та  $P$ -схем заміщення є різними, то це може призводити до суттєвих розбіжностей у миттєвих значеннях для заданого моменту часу, що знижує однозначність аналізу.

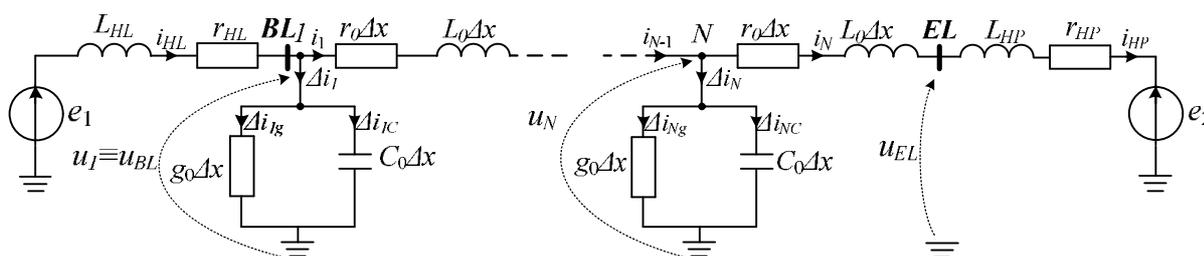
Таким чином, обрані об'єкт і режим забезпечують баланс між простотою реалізації і достатнім рівнем точності для дослідження перехідних та усталених режимів роботи лінії. Це дає змогу зосередитися на структурних аспектах моделювання, таких як застосування різних схем заміщення для ідентифікації крайових умов до рівняння довгої лінії.

Першочергово представимо розробку математичної моделі лінії електропередачі, коли для ідентифікації крайових умов до рівняння довгої лінії використано пряму  $\Gamma$ -подібну схему заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі.

На рис. 1 представлено розрахункову схему заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні прямої  $\Gamma$ -схеми заміщення.

Розрахункова схема заміщення, яка представлена на рис. 1, складається з першої та останньої

дискретних ділянок лінії електропередачі, які представлені прямою  $\Gamma$ -схемою заміщення з повздовжніми параметрами – активним опором  $r_0\Delta x$  та індуктивністю  $L_0\Delta x$  і поперечними параметрами – активною провідністю  $g_0\Delta x$  та ємністю  $C_0\Delta x$ , де  $\Delta x$  – крок дискретизації. З обох сторін (зліва та справа) до лінії електропередачі приєднано гілки еквівалентного активно-індуктивного навантаження з параметрами:  $r_{HL}, L_{HL}$  – зліва та  $r_{HP}, L_{HP}$  – справа. Живлення лінії відбуватиметься по чергово від двох джерел нескінченної потужності:  $e_1$  – зліва та  $e_2$  – справа.



**Рис. 1.** Розрахункова схема заміщення дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні прямої  $\Gamma$ -схеми заміщення

**Fig. 1.** Computational equivalent circuit of discrete sections of the transmission line using the direct  $\Gamma$ -equivalent circuit

Дискретизуючи рівняння (2), із використанням методу прямих (центральна похідна), отримаємо:

$$\frac{dv_j}{dt} = (L_0 C_0)^{-1} \frac{\partial^2 u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} - (L_0 g_0 + r_0 C_0) v_j - r_0 g_0 u_j \quad (3)$$

де  $\Delta x$  – крок дискретизації;  $j$  – номер вузла дискретизації лінії електропередачі.

Аналізуючи рівняння (3), легко побачити, що за їх допомогою ми зможемо знайти напруги у всіх вузлах, крім першого та останнього ( $j = 2 \dots N-1$ ), оскільки для знаходження напруги на першому ( $j = 1$ ) та останньому ( $j = N$ ) нам потрібно знати напруги на фіктивних вузлах на початку ( $u_0$ ) та в кінці ( $u_{N+1}$ ) лінії електропередачі. Ознайомитися з методиками пошуку цих напруг на основі крайових умов Робена-Пуанкаре можна, наприклад, у наших працях [1; 9; 12]. Натомість у цій статті для розв'язання поставлених завдань ми пропонуємо використати крайові умови Неймана, зокрема знаходити напруги на першому та останньому вузлах дискретизації як напругу на ємності  $C_0\Delta x$ .

Фактично, розв'язуючи рівняння (3,  $j = 2 \dots N-1$ ), ми будемо мати картину розподілу напруг у

внутрішньому континуумі лінії, який описується диференціальними рівняннями із частинними похідними, натомість напруги по краях лінії (крайові умови) пропонуємо знаходити на основі колових підходів. Представимо пошук фіктивних напруг на краях лінії електропередачі.

Для схеми, представленій на рис. 1, запишемо рівняння стаціонарних зв'язків:

$$i_{HL} - i_1 - D_{i1} = 0, \quad D_{i1} = D_{i1c} + D_{i1g}, \quad (4)$$

$$D_{i1g} = g_0 \Delta x u_1;$$

$$i_{N-1} - i_N - D_{iN} = 0, \quad D_{iN} = D_{iNc} + D_{iNg}, \quad (5)$$

$$D_{iNg} = g_0 \Delta x u_N,$$

де  $\Delta i_j$  – струми витoku на ділянці  $\Delta x$ ;  $\Delta i_{jg}$ ,  $\Delta i_{jc}$  – струми витoku через активну провідність та ємнісну провідність на ділянці  $\Delta x$  відповідно.

Враховуючи рівняння (4) і (5), на основі законів електротехніки можемо записати:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{\Delta x C_0} (i_{HL} - i_1) - \frac{g_0}{C_0} u_1,$$

$$\frac{du_N}{dt} = \frac{1}{\Delta x C_0} (i_{N-1} - i_{HP}) - \frac{g_0}{C_0} u_N. \quad (6)$$

Струми в гілках навантаження на початку та кінці лінії електропередачі можемо знайти з диференціальних рівнянь, які легко отримати на основі II закону Кірхгофа (див. рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{di_{HL}}{dt} &= \frac{1}{L_{HL}}(e_1 - r_{HL}i_{HL} - u_1), \\ \frac{di_{HP}}{dt} &= \frac{1}{L_{HP}}(u_{EL} - r_{HP}i_{HP} - e_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Струми в дискретних гілках лінії можемо знайти, використовуючи рівняння довгої лінії першого порядку, яке можна легко отримати на основі закону електромагнітної індукції:

$$- \frac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (8)$$

Дискретизуючи рівняння (8) методом прямих, але на цей раз використовуючи поняття правої похідної, отримаємо рівняння

$$- \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = r_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt}, \quad (9)$$

звідки будемо мати

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L_0 \Delta x}(u_j - u_{j+1}) - \frac{r_0}{L_0} i_j, \quad j=1, \dots, N-1. \quad (10)$$

Тепер покажемо, як можна знайти напругу в кінці лінії електропередачі. За II законом Кірхгофа, для схеми, представленої на рис. 1, можемо записати:

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{1}{\Delta x L_0}(u_N - \Delta x r_0 i_N - u_{EL}). \quad (11)$$

Оскільки струм в останній дискретній гілці тотожно рівний струму в гілці навантаження з правого боку лінії  $i_N \equiv i_{HP}$ , то з урахуванням початкових умов можемо записати:

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{di_{HP}}{dt}. \quad (12)$$

Підставивши у рівняння (12), друге рівняння з (7) та рівняння (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x L_0}(u_N - \Delta x r_0 i_N - u_{EL}) &= \\ &= \frac{1}{L_{HP}}(u_{EL} - r_{HP}i_{HP} - e_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Виразивши з рівняння (13) напругу в кінці лінії  $u_{EL}$ , отримаємо:

$$u_{EL} = \frac{\Delta x L_0 L_{HP}}{\Delta x L_0 + L_{HP}} \times \frac{1}{L_{HP}}(r_{HP}i_{HP} + e_2) + \frac{1}{\Delta x L_0}(u_N - \Delta x r_0 i_N) \quad (14)$$

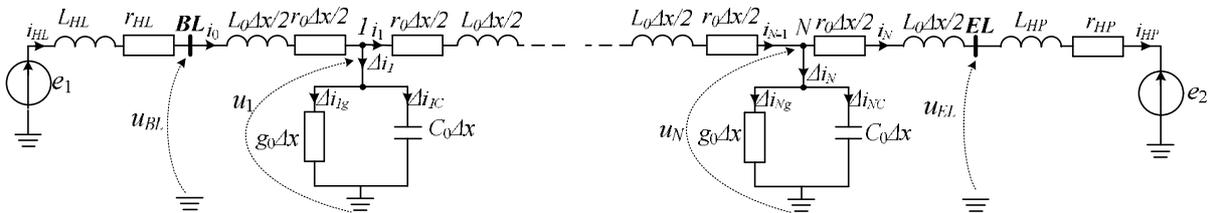
Сумісному інтегруванню підлягає така система диференціальних рівнянь: (3,  $j=2, \dots, N-1$ ), (6), (7), (10,  $j=1, \dots, N-1$ ), (11) з урахуванням (4), (5) та (14).

Щодо розробки аналогічної моделі з використанням зворотної  $\Gamma$ -схеми, то цього робити не потрібно, адже специфіка проведення числових експериментів, при якій живлення лінії відбуватиметься по чергово від джерел  $e_1$  та  $e_2$ , уже апіорі передбачатиме використання зворотної схеми. Деталі проведення такого числового експерименту опишемо в результатах числових експериментів.

Наступним кроком ми пропонуємо ознайомитися із застосуванням  $T$ -схеми заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії для ідентифікації крайових умов.

На рис. 2 представлено розрахункову схему заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні  $T$ -схеми заміщення.

Розрахункова схема заміщення, яка представлена на рис. 2, складається з першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі, які представлені  $T$ -схемою заміщення з повздовжніми половинними параметрами – активними опорами  $r_0 \Delta x / 2$  та індуктивностями  $L_0 \Delta x / 2$  і поперечними параметрами – активною провідністю  $g_0 \Delta x$  та ємністю  $C_0 \Delta x$ , де  $\Delta x$  – крок дискретизації. Аналогічно до попереднього випадку, з обох боків (зліва та справа) до лінії електропередачі приєднано гілки еквівалентного активно-індуктивного навантаження з параметрами  $r_{HL}$ ,  $L_{HL}$  – зліва та  $r_{HP}$ ,  $L_{HP}$  – справа. Живлення лінії відбуватиметься по чергово від двох джерел нескінченної потужності:  $e_1$  – зліва та  $e_2$  – справа.



**Рис. 2.** Розрахункова схема заміщення дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні  $T$ -схеми заміщення

**Fig. 2.** Computational equivalent circuit of discrete sections of the transmission line using the  $T$ -equivalent circuit

Використання цієї схеми є досить цікавою задачею, оскільки в ній, на відміну від попереднього випадку, струми у лінії не можна знаходити із системи диференціальних рівнянь суцільного континууму лінії. Це пов'язано з тим, що крайні гілки з лівого та правого боку лінії мають половинні параметри ( $\Delta x/2$ ). У попередньому випадку це можна було робити за умови пошуку фіктивних напруг на основі крайових умов Робена-Пуанкаре, але для уможливлення використання спільного підходу для всіх трьох схем заміщення ми відмовилися від цього і використали крайові умови Неймана. У теоретичному плані використання  $T$ -схеми заміщення має свої переваги, оскільки лінія буде повністю симетрична відносно її кінців.

Аналогічно, як і в попередньому випадку, напруги та струми ми знаходитимемо з диференціальних рівнянь (3,  $j = 2, \dots, N-1$ ) та (10,  $j = 2, \dots, N-1$ ). Натомість напруги в першому та останньому дискретних вузлах, а також струми у крайніх півгілках потрібно знаходити на основі колових підходів.

Для схеми, представленої на рис. 2, рівняння стаціонарних зв'язків та диференціальні рівняння для знаходження напруг на першому та останньому вузлах дискретизації будуть такими самими (рівняння (4) – (6)), як і для схеми на рис. 1, проте рівняння електромагнітного стану крайніх півгілок та гілок навантаження будуть іншими:

$$\begin{aligned} \frac{di_0}{dt} &= \frac{2}{L_0 \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} u_{BL} - \frac{r_0 \Delta x}{2} i_0 - u_1 \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{di_N}{dt} &= \frac{2}{L_0 \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} u_N - \frac{r_0 \Delta x}{2} i_N - u_{EL} \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (15)$$

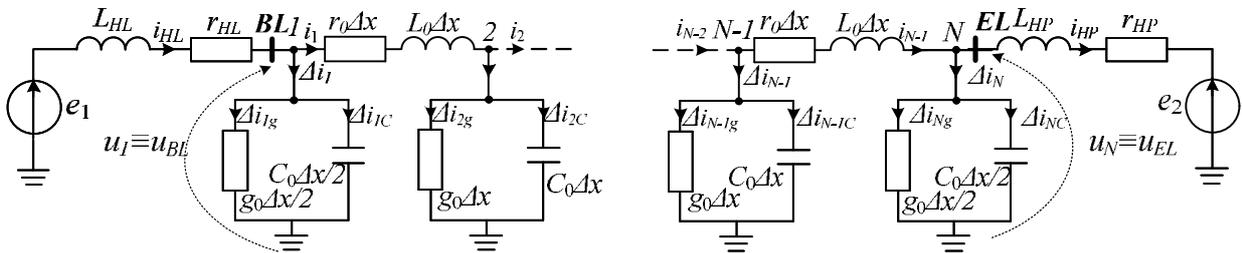


Рис. 3. Розрахункова схема заміщення дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні  $\Pi$ -схеми заміщення

Fig. 3. Computational equivalent circuit of discrete sections of the transmission line using the  $\pi$ -equivalent circuit

Розрахункова схема заміщення, яка представлена на рис. 3, складається з фрагмента першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі, які представлені  $\Pi$ -схемою заміщення. Крайні поперечні параметри, згідно з теоретичними

$$\begin{aligned} \frac{di_{HL}}{dt} &= \frac{1}{L_{HL}} (e_1 - r_{HL} i_{HL} - u_{BL}), \\ \frac{di_{HP}}{dt} &= \frac{1}{L_{HP}} (u_{EL} - r_{HP} i_{HP} - e_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Оскільки через наявність по краях лінії півгілок  $r_0 \Delta x/2$  та  $L_0 \Delta x/2$  напруга на початку лінії не дорівнює напрузі першого вузла дискретизації  $u_{BL} \neq u_1$  та напруга в кінці лінії не дорівнює напрузі останнього вузла дискретизації,  $u_{EL} \neq u_N$ , то нам потрібно знайти ці напруги. Знаходимо ці напруги у спосіб, який описано вище для  $T$ -схеми. Представимо кінцеві вирази для знаходження цих напруг.

$$\begin{aligned} u_{BL} &= \frac{L_{HL} L_0 \Delta x}{L_0 \Delta x + 2L_{HL}} \times \\ &\times \left[ \frac{e_1}{L_0 \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r_0 \Delta x}{2} i_0 + u_1 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{L_{HL}} (e_1 - r_{HL} i_{HL}) \frac{\partial}{\partial t} \right], \\ u_{EL} &= \frac{L_{HP} L_0 \Delta x}{L_0 \Delta x + 2L_{HP}} \times \\ &\times \left[ \frac{e_2}{L_0 \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{r_0 \Delta x}{2} i_N - \frac{1}{L_{HP}} (r_{HP} i_{HP} + e_2) \frac{\partial}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Відтак для аналізу процесів у довгій лінії електропередачі з використанням  $T$ -схем заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі сумісному інтегруванню підлягає така система диференціальних рівнянь: (3,  $j = 2, \dots, N-1$ ), (6), (10,  $j = 1, \dots, N-1$ ), (15), (16) з урахуванням (4), (5) та (17).

Тепер розглянемо застосування  $\Pi$ -схеми заміщення дискретних ділянок лінії електропередачі. На рис. 3 представлено розрахункову схему заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі при застосуванні  $\Pi$ -схеми заміщення.

положеннями, будуть складати половину погонної активної провідності –  $g_0 \Delta x/2$  та ємності –  $C_0 \Delta x/2$ , де  $\Delta x$  – крок дискретизації. Аналогічно до попередніх випадків, з обох сторін (зліва та справа) до лінії електропередачі приєднано гілки еквівалентованих

активно-індуктивних навантажень із параметрами  $r_{HL}, L_{HL}$  – зліва та  $r_{HP}, L_{HP}$  – справа. Живлення лінії відбуватиметься почергово від двох джерел нескінченної потужності:  $e_1$  – зліва та  $e_2$  – справа.

$\Pi$ -схема заміщення є теж симетричною відносно кінців лінії електропередачі. Варто відзначити, що при застосуванні  $\Pi$ -схеми заміщення кількість струмів є на один меншою від кількості вузлів дискретизації (напруг), що дає змогу здійснювати пошук струмів у дискретних гілках лінії із системи диференціальних рівнянь (10) ( $j_i = 1 \dots N$ ) для суцільного континууму лінії. Представимо пошук напруг першого та останнього дискретних вузлів лінії електропередачі.

Для схеми, представленої на рис. 3, запишемо рівняння стаціонарних зв'язків:

$$\begin{aligned} i_{HL} - i_1 - Di_1 &= 0, \\ Di_1 &= Di_{1C} + Di_{1g}, \quad Di_{1g} = \frac{g_0 Dx}{2} u_1; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} i_N - i_{HP} - Di_N &= 0, \\ Di_N &= Di_{NC} + Di_{Ng}, \quad Di_{Ng} = \frac{g_0 Dx}{2} u_N. \end{aligned} \quad (19)$$

Тепер, аналогічно до попередніх випадків, запишемо рівняння для знаходження напруг на першому та останньому вузлах дискретизації, враховуючи рівняння стаціонарних зв'язків (18) і (19):

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{2}{DxC_0} (i_{HL} - i_1) - \frac{g_0}{C_0} u_1, \\ \frac{du_N}{dt} &= \frac{2}{DxC_0} (i_N - i_{HP}) - \frac{g_0}{C_0} u_N. \end{aligned} \quad (20)$$

Струми в гілках навантаження можна знайти з таких диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{di_{HL}}{dt} &= \frac{1}{L_{HL}} (e_1 - r_{HL} i_{HL} - u_1), \\ \frac{di_{HP}}{dt} &= \frac{1}{L_{HP}} (u_N - r_{HP} i_{HP} - e_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Здійснювати окремий пошук напруг на початку та кінці лінії електропередачі не має змісту, оскільки вони тотожно рівні напругам першого та останнього вузлів дискретизації ( $u_{BL} \equiv u_1, u_{EL} \equiv u_N$ ) відповідно.

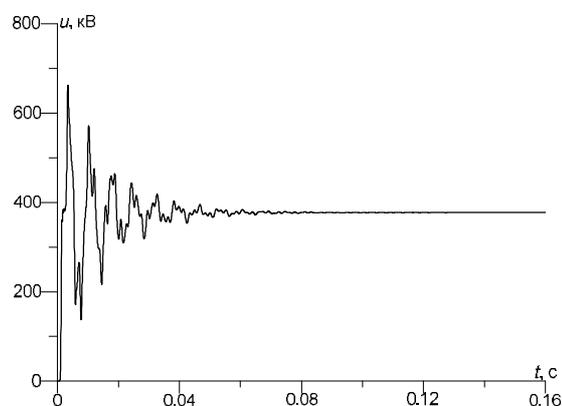
Сумісному інтегруванню підлягає така система диференціальних рівнянь: (3,  $j = 2, \dots, N-1$ ), (10,  $j = 1, \dots, N-1$ ), (20), (21) з урахуванням (18) та (19).

**Результати числових експериментів.** На основі розроблених математичних моделей мовою програмування *Fortran* у середовищі *Intel Visual Fortran Compiler* версії 19.x було написано програмні коди, які дають змогу здійснювати моделювання роботи лінії електропередачі. Як уже згадувалося

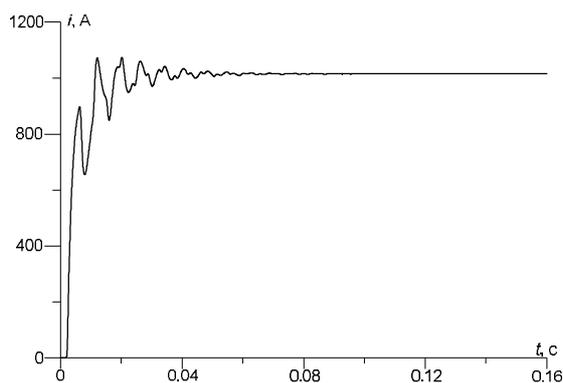
раніше, комп'ютерні експерименти здійснювалися для визначення симетричності розподілу струмів та напруг у лінії електропередачі за використання  $\Gamma$ -,  $T$ - та  $\Pi$ -схем заміщення першої і останньої дискретних ділянок лінії електропередачі при ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії. Було здійснено три числових експерименти, відповідно по одному для кожної схеми заміщення, кожен експеримент складався з двох етапів: на першому етапі живлення лінії відбувається з лівого боку, а з правого боку до лінії приєднано еквівалентоване активно-індуктивне навантаження, у другому етапі – навпаки. Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь здійснювалося методом Гіра 2-го порядку з часовим кроком  $\Delta t = 27$  мкс.

Задля зручності порівняння отриманих результатів для розрахунків було прийнято уніполярну лінію постійного струму  $e_1 = e_2 = 400$  кВ довжиною 473 км. Лінія має такі параметри:  $r_0 = 0,82 \cdot 10^{-4}$  Ом/м,  $L_0 = 0,175 \cdot 10^{-5}$  Гн/м,  $C_0 = 0,103 \cdot 10^{-10}$  Ф/м,  $g_0 = 3,232 \cdot 10^{-10}$  См/м. Для всіх експериментів параметри еквівалентованого активно-індуктивного навантаження становили  $R_{HL} = R_{HP} = 350$  Ом,  $L_{HL} = L_{HP} = 1$  Гн. Експерименти здійснювалися для увімкнення лінії в початковий момент часу ( $t = 0$  с) та виходу системи в ustalений режим. Для наочного відображення та розуміння картини перебігу перехідних процесів у модельованій лінії постійного струму, для прикладу, на рис. 4 і 5 представлено перехідні процеси напруги по середині лінії та струму через гілку навантаження при використанні  $\Gamma$ -схеми заміщення відповідно.

Перехідні процеси при використанні  $\Gamma$ -,  $T$ - та  $\Pi$ -схем мають незначні відмінності, які пов'язані з різними сталими часу цих схем, тому задля уникнення зайвих похибок ми будемо здійснювати порівняння координат ustalеного режиму.



**Рис. 4.** Перехідний процес напруги по середині лінії  
**Fig. 4.** Transient voltage process at the midpoint of the transmission line



**Рис. 5.** Перехідний процес струму через гілку навантаження

**Fig. 5.** Transient current process through the load branch

Оскільки комп'ютерні симуляції другого етапу кожного експерименту здійснювалися без зміни розроблених моделей, то значення струмів для другого етапу кожного експерименту представлено по модулю.

**Перший експеримент.** Перший експеримент здійснювали на основі  $\Gamma$ -схеми заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі. Дискретизація хвильового рівняння лінії (2) відбувалася на 20 частин ( $N = 20$ ), відповідно  $\Delta x = 473/20 = 23,65$  км. Для цього експерименту взято парну кількість вузлів, щоб можна було висвітлювати значення напруги в геометричному центрі лінії.

У першому етапі  $e_1 = 400$  кВ,  $e_2 = 0$  кВ,  $R_{HP} = 350$  Ом,  $L_{HP} = 1$  Гн. Оскільки згідно з II законом комутації напруга на ємності миттєво змінитися не може, між джерелом живлення та лінією електропередачі ми будемо вмикати  $RL$ -гілку, у першому етапі  $R_{HL} = 2$  Ом,  $L_{HL} = 0,1$  Гн.

У другому етапі живлення відбувалося з протилежної сторони лінії,  $e_2 = 400$  кВ,

$e_1 = 0$  кВ,  $R_{HL} = 350$  Ом,  $L_{HL} = 1$  Гн. У цьому етапі немає необхідності введення  $RL$ -гілки між джерелом живлення та лінією, оскільки використовується пряма  $\Gamma$ -схема заміщення і між останнім дискретним вузлом  $N$  та джерелом живлення  $e_2$  знаходиться остання дискретна гілка лінії  $r_0\Delta x L_0\Delta x$ . Однак для дотримання симетричності досліджуваних систем ми вимушені додатково ввести  $RL$ -гілку з аналогічними параметрами, як у першому етапі:  $R_{HP} = 2$  Ом,  $L_{HP} = 0,1$  Гн.

Ми не висвітлюватимемо отримані результати для всіх дискретних ділянок лінії, а представимо лише для початку, центру та кінця лінії. Результати першого експерименту подано в табл. 1.

Аналіз результатів першого експерименту доцільно розпочати із значень напруги. Оскільки лінія несиметрична відносно її кінців (при застосуванні прямої  $\Gamma$ -схеми заміщення), то ми можемо порівнювати напругу лише в геометричному центрі лінії електропередачі. У нашому випадку геометричним центром лінії є одинадцятий дискретний вузол. Бачимо, що напруги одинадцятого дискретного вузла відрізняються на 45 В при напрузі живлення лінії 400 кВ, відносна похибка становить 0,01 %. Щодо напруг в інших вузлах, то, на жаль, подібних порівнянь здійснити неможливо через конфігурацію  $\Gamma$ -схеми.

Для порівняльного аналізу струмів ми можемо використати вже два значення. Перше значення – це струми по середині лінії (вони мають бути, як і напруги, однаковими), а друге – струми через гілку навантаження. Геометрично, струм по середині лінії – це струм у десятій дискретній гілці лінії. Бачимо, що струми в десятій дискретній гілці лінії відрізняються на 0,3 А, що становить 0,02 % відносної похибки. Аналогічні абсолютну та відносну похибки має і струм через гілки навантажень (двадцять дискретна гілка для першого етапу та струм  $i_{HL}$  для другого етапу).

**Таблиця 1.** Результати першого експерименту

**Table 1.** Results of the first experiment

Вузол/Гілка	$i_{HL}$	1	2	...	9	10	11	...	18	19	20
Перший етап											
Напруга, В	-	397876	395808	...	381435	379398	<b>377366</b>	...	363319	361338	359364
Струм, А	<b>1073,3</b>	1070,2	1067,2	...	1046,4	<b>1043,5</b>	1040,7	...	1020,9	1018,1	<b>1015,4</b>
Другий етап											
Напруга, В	-	357310	359285	...	373276	375296	<b>377321</b>	...	391639	393706	395779
Струм, А	<b>1015,1</b>	1017,8	1020,6	...	1040,3	<b>1043,2</b>	1046,0	...	1066,6	1069,6	<b>1072,6</b>

Асиметрія  $\Gamma$ -схеми заміщення полягає у відсутності дзеркального відображення імпедансів на вході та виході, що призводить до порушення

умов суперпозиції хвиль при зміні напрямку живлення. У результаті центральна точка лінії виявляється нееквівалентною незалежно від

варіанта живлення, що є основною причиною виникнення похибки при застосуванні цієї схеми як моделі крайових умов.

**Другий експеримент.** Другий експеримент здійснювався на основі  $T$ -схеми заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі. Дискретизацію хвильового рівняння лінії (2) здійснено на 21 частину ( $N = 21$ ), відповідно  $\Delta x = 473/21 = 22,52$  км (непарна кількість вузлів необхідна для аналізу значень напруги по середині лінії).

У першому етапі  $e_1 = 400$  кВ,  $e_2 = 0$  кВ,  $R_{HP} = 350$  Ом,  $L_{HP} = 1$  Гн. З теоретичного погляду, для цього експерименту не потрібно вводити жодних додаткових  $RL$ -гілок, оскільки застосування  $T$ -схеми передбачає наявність на початку та в кінці

лінії гілок  $r_0\Delta x/2$ ,  $L_0\Delta x/2$ . Однак для уможливлення порівняння між собою результатів усіх експериментів лінія повинна працювати в однакових умовах у всіх випадках. Тому ми додатково вводимо в першому етапі  $R_{HL} = 2$  Ом,  $L_{HL} = 0,1$  Гн.

Для другого етапу живлення відбувалося з протилежної сторони лінії електропередачі,  $e_2 = 400$  кВ,  $e_1 = 0$  кВ,  $R_{HL} = 350$  Ом,  $L_{HL} = 1$  Гн та аналогічно до першого етапу  $R_{HP} = 2$  Ом,  $L_{HP} = 0,1$  Гн.

Результати другого експерименту представлено у табл. 2.

Результати числового експерименту повністю підтвердили теоретичні сподівання щодо однаковості напруг у геометричному центрі лінії (одинадцятий дискретний вузол). Бачимо, що напруги повністю однакові для двох етапів.

**Таблиця 2.** Результати другого експерименту

**Table 2.** Results of the second experiment

Вузол/Гілка	$i_{HL}$	1	2	...	10	11	12	...	19	20	21/ $i_{HP}$
Перший етап											
Напруга, В	-	396879	394908	...	379281	<b>377346</b>	375416	...	362048	360162	358281
Струм, А	<b>1073,0</b>	1070,1	1067,2	...	<b>1044,7</b>	<b>1042,0</b>	1039,2	...	1020,5	1017,8	<b>1015,2</b>
Другий етап											
Напруга, В	-	358281	360162	...	375416	<b>377346</b>	379281	...	392940	394908	396879
Струм, А	<b>1015,2</b>	1017,8	1020,5	...	<b>1042,0</b>	<b>1044,7</b>	1047,5	...	1067,2	1070,1	<b>1073,0</b>

Щодо порівняння струмів, то тут теж є своя специфіка, через застосування  $T$ -схеми та використання непарної кількості дискретних вузлів ми можемо порівняти значення струмів у десятій дискретній гілці для першого етапу та одинадцятій – для другого і навпаки, також порівнянню підлягають струми у гілках навантаження. Бачимо, що струми у згаданих гілках теж повністю однакові.

**Третій експеримент.** Третій експеримент здійснювався на основі  $\Pi$ -схеми заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі. Дискретизація хвильового рівняння лінії (2) відбувалася, як і у попередньому експерименті для  $N = 21$ , відповідно  $\Delta x = 473/21 = 22,52$  км. Однак оскільки за використання  $\Pi$ -схеми гілок буде на одну менше від вузлів, то дискретних ділянок буде

двадцять. Використання непарної кількості вузлів у цьому експерименті теж пов'язане з аналізом значення напруги в геометричному центрі лінії.

Аналогічно до попередніх експериментів, у першому етапі  $e_1 = 400$  кВ,  $e_2 = 0$  кВ,  $R_{HP} = 350$  Ом,  $L_{HP} = 1$  Гн, а в другому –  $e_2 = 400$  кВ,  $e_1 = 0$  кВ,  $R_{HL} = 350$  Ом,  $L_{HL} = 1$  Гн. Використання  $\Pi$ -схеми передбачає застосування додаткових  $RL$ -гілок, інакше електрорушійна сила буде підключена безпосереднього до ємності крайніх вузлів лінії, що порушуватиме  $\Pi$  закон комутації. Тому для першого етапу  $R_{HL} = 2$  Ом,  $L_{HL} = 0,1$  Гн і для другого  $R_{HP} = 2$  Ом,  $L_{HP} = 0,1$  Гн (аналогічно до попередніх експериментів).

Результати третього експерименту наведено в табл. 3.

**Таблиця 3.** Результати третього експерименту

**Table 3.** Results of the third experiment

Вузол/Гілка	$i_{HL}$	1	2	...	10	11	12	...	19	20	21/ $i_{HP}$
Перший етап											
Напруга, В	-	397837	395849	...	380165	<b>378233</b>	376306	...	362964	361074	359186
Струм, А	<b>1075,4</b>	1074,0	1071,1	...	<b>1048,5</b>	<b>1045,7</b>	1043,0	...	1024,2	1021,6	<b>1020,3</b>
Другий етап											
Напруга, В	-	359186	361074	...	376306	<b>378233</b>	380165	...	393867	395849	397837
Струм, А	<b>1020,3</b>	1021,6	1024,2	...	<b>1045,7</b>	<b>1048,5</b>	1051,3	...	1071,1	1074,0	<b>1075,4</b>

Аналізуючи результати третього експерименту, бачимо, що, як і в попередньому експерименті, напруги по середині лінії (11 вузол дискретизації) однакові. Струми в десятій дискретній гілці на першому етапі та одинадцятій дискретній гілці другого етапу і навпаки теж однакові. Аналогічно струми у гілках навантаження на першому та другому етапах однакові.

Узагальнюючи результати експериментів, порівнюємо результати, отримані на основі різних схем, та проаналізуємо значення напруги в геометричному центрі лінії. У першому експерименті на першому етапі напруга по середині лінії становила 377366 кВ, для другого етапу 377321 кВ, у другому експерименті для обох етапів 377346 кВ, у третьому експерименті для обох етапів 377333 кВ. Відповідно найменше значення напруги було в другому етапі першого експерименту, а найбільше – у першому етапі цього ж експерименту. Щодо струмів через гілку навантаження, то бачимо, що симетричні  $T$ - та  $\Pi$ -схеми дають ідентичні результати, а застосування несиметричної  $\Gamma$ -схеми призводить до незначної похибки розміром у соті частки відсотка.

**Висновки.** 1. У статті здійснено порівняльний аналіз  $\Gamma$ -,  $T$ - та  $\Pi$ -схем для заміщення першої та останньої дискретних ділянок лінії електропередачі для ідентифікації крайових умов до хвильового рівняння довгої лінії. Встановлено, що використання кожної зі схем має свої переваги та обмеження, залежно від умов застосування та мети моделювання.

2. До головних результатів аналізу можна віднести такі:

- застосування  $\Gamma$ -схеми заміщення забезпечує простоту обчислень, проте робить лінію електропередачі несиметричною відносно її кінців, що призводить до похибки;

-  $T$ -схема є симетричною, що дає змогу уникнути похибок у результатах моделювання, проте застосування цієї схеми унеможливає знаходження струмів із загальної системи диференціальних рівнянь для всього континууму лінії електропередачі через половинні параметри дискретних ділянок лінії електропередачі на її кінцях. Також варто відзначити, що при застосуванні  $T$ -схеми заміщення кількість дискретних гілок буде на одну більшою, ніж вузлів, що теж призводить до певних незручностей;

-  $\Pi$ -схема, хоча і складніша в реалізації, проте забезпечує високу точність і симетричність моделювання, що робить її оптимальною для задач із надвисокою точністю. Однак, як і у випадку із  $T$ -

схемою, кількість струмів у дискретних гілках не відповідає кількості напруг у вузлах дискретизації (вузлів на один більше, ніж гілок). Окрім цього, використання цієї схеми унеможливає пошук напруг першого та останнього вузлів лінії з хвильового рівняння (розв'язок хвильового рівняння для всього континууму лінії) через наявність у них половинних параметрів ємностей та активних провідностей по краях.

3. Результати числових експериментів продемонстрували, що в разі застосування  $\Gamma$ -схеми напруга в геометричному центрі лінії відрізняється на 45 В для різних напрямів живлення, що є мізерною похибкою (0,01 %) при напрузі живлення лінії 400 кВ.  $T$ - та  $\Pi$ -схеми забезпечують однакові значення напруги та струмів у геометричному центрі та на крайніх вузлах, що підтверджує їхню симетричність та доцільність застосування у задачах із надвисокою точністю.

4. Розроблені математичні моделі та результати числових експериментів можуть бути використані для вдосконалення методів аналізу довгих ліній електропередачі постійного струму, особливо в умовах роботи з високими напругами та нестабільними режимами.

Подальші дослідження планується спрямувати на аналіз впливу параметрів лінії та режимів її роботи в електричних мережах змінного та постійного струмів, а також на інтеграцію отриманих моделей у програмні комплекси для аналізу електричних мереж.

#### Бібліографічний список

1. An application of the Hamilton-Ostrogradsky principle to the modeling of an asymmetrically loaded three-phase power line / A. Chaban, M. Lis, A. Szafraniec, V. Levoniuk. *Energies*. 2022. Vol. 15, is. 21. P. 8255.
2. Balci S., Akkaya M. Regression model extractions of a T-equivalent circuit modeling for medium-length transmission line based-on the parametric simulation approach. *Journal of Polytechnic*. 2024. Vol. 27, No. 4. P. 1649–1658.
3. Comparative analysis of high-voltage power line models for determining short-circuit currents in towers earthing systems / R. Tarko, J. Gajdzica, W. Nowak, W. Szpyra. *Energies*. 2021. Vol. 14. P. 4729.
4. Dommel H. W. Digital computer solution of electromagnetic transients in single- and multiphase networks. *IEEE Transactions on power apparatus and systems*. 1969. P. 388–399.
5. Fault analysis on three phase system by auto reclosing mechanism / V. Gamit, V. Karode, K. Mistry, P. Parmar, A. Chaudhari. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2015. Vol. 4, No. 5. P. 292–298.
6. Formal verification of ABCD parameters based models for transmission lines / E. Deniz, A. Rashid, O. Hasan, S. Tahar. *Proceedings of the 10th International Symposium "Symbolic Computation in Software Science" (SCSS)*. 2024. P. 20–37.

7. Keller R. B. Design for electromagnetic compatibility – in a nutshell. Theory and practice. Einsiedeln: [s. n.], 2022. 423 p.
8. Lumped-circuits model of lossless transmission lines and its numerical characteristics / H. Zhou, T. Lu, S. Zhang, X. Zhang. *Front. Energy Res.* 2021. Vol. 9. P. 809434.
9. Mathematical Modelling of Transient Processes in a Three Phase Electric Power System for a Single Phase Short-Circuit / A. Chaban, M. Lis, A. Szafraniec, V. Levoniuk. *Energies.* 2022. Vol. 15, is. 3. P. 1126.
10. Morched A., Gustavsen B., Tartibi M. A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables. *IEEE Transactions on Power Delivery.* 1999. Vol. 14, is. 3. P. 1032–1038.
11. Partitioned fitting and DC correction for the simulation of electromagnetic transients in transmission lines/cables / M. Cervantes, I. Kocar, J. Mahseredjian, A. Ramirez. *IEEE Transactions on Power Delivery.* 2018. Vol. 33, No. 6. P. 3246–3248.
12. Perzynski T., Levoniuk V., Figura R. Transient Electromagnetic Processes Analysis in High Voltage Transmission Lines during Two-Phase Short Circuits. *Sensors.* 2023. No. 1. P. 298.
13. Simonyi K. Theoretische Elektrotechnik. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956. 842 p.

Стаття надійшла 20.01.2025