

Розділ 1

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ТА ТЕХНОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ҐРУНТІВ, СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАТЕРІАЛІВ І СИРОВИНИ

УДК 631.635

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІН ВОЛОГОСТІ ҐРУНТУ З УРАХУВАННЯМ ІМПУЛЬСНИХ ВПЛИВІВ У ЦИФРОВОМУ ЗЕМЛЕРОБСТВІ

*Мирослава Прохоренко, к. ф.-м. н., Сергій Прохоренко, д. т. н., Богдан Марчук,
Віктор Лозинський, к. т. н.*

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: myroslava.v.prokhorenko@lpnu.ua; serhii.v.prokhorenko@lpnu.ua;
bohdan.marchuk.tsz.2024@lpnu.ua; viktor.a.lozynskyi@lpnu.ua*

Микола Мороз, д. ф.-м. н.

*Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна 11, м. Рівне, Україна, e-mail: m.v.moroz@niwmt.edu.ua*

Андрій-Володимир Мідик, к. т. н.

*Львівський державний університет внутрішніх справ,
вул. Городоцька, 26, м. Львів, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: andriy31194@gmail.com*

Ольга Лиса, к. т. н., Віктор Семерак, к. т. н.

*Львівський національний університет природокористування
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: ovl2407@ukr.net; semerakviktor@gmail.com*

<https://doi.org/10.32718/agroengineering2025.29.9-15>

Прохоренко М., Прохоренко С., Марчук Б., Лозинський В., Мороз М., Мідик А.-В., Лиса О., Семерак В.
Математичне моделювання змін вологості ґрунту з урахуванням імпульсних впливів у цифровому землеробстві

Однією з ключових тем, що потребує уваги в рамках точного землеробства, є контроль вологості ґрунту. Цей показник безпосередньо впливає на рівень урожайності, ефективність використання водних ресурсів, а також на загальний стан агроєкосистеми. Якщо вологи недостатньо, можна зіткнутися зі значним зниженням урожайності, а надмірна волога може спричинити вимивання важливих поживних речовин та навіть ерозію ґрунту. Тому дуже важливо розуміти, як змінюється вологість під впливом різних факторів – опадів, випаровування, інфільтрації та споживання рослинами. Для покращання агропрактик важливо розробити ефективні математичні моделі, які сприятимуть аналізу змін вологості ґрунту. Це, у свою чергу, дозволить точно визначити необхідність додаткового зрошення в оптимальні терміни.

Сформовано математичну модель змін динаміки вологості ґрунту з урахуванням поливу у вигляді імпульсної дії, що дозволяє встановити оптимальні моменти для зрошення, а отже – підвищити ефективність водокористування в точному землеробстві. Методика та результати полягають у застосуванні диференціального рівняння з імпульсною дією для врахування імпульсного зрошення за умов досягнення необхідного рівня осушеності (тобто дезволожування). Визначено (для представників різних типів ґрунтів) часові моменти досягнення критичних рівнів вологості, що потребують впровадження імпульсу зрошення. Модель, представлена в дослідженні, може бути використана для автоматизованого керування зрошувальними системами, оцінки ефективності утримання вологи в різних типах ґрунтів, а також для оптимізації агротехнічних заходів у точному землеробстві. Наукова новизна та практична значущість полягають у запропонованій імпульсній математичній моделі динаміки вологості, що дозволяє точно формалізувати моменти необхідного поливу. Результати можна використати для створення систем автоматизованого управління зрошенням у точному землеробстві, зменшуючи перевитрати води та підвищуючи урожайність.

Ключові слова: моделювання вологості, імпульсне зволоження, диференціальні рівняння.

Prokhorenko M., Prokhorenko S., Marchuk B., Lozynskyi V., Moroz M., Midyk A.-V., Lysa O., Semerak V.
Mathematical modeling of soil moisture changes considering impulse effects in digital agriculture

One of the key topics requiring attention within the framework of precision agriculture is soil moisture control. This parameter directly affects crop yield levels, the efficiency of water resource utilization, and the overall condition of the agroecosystem.

Insufficient moisture can significantly reduce yield, while excessive moisture can cause nutrient leaching and even soil erosion. Therefore, it is crucial to understand how soil moisture changes under the influence of various factors, such as precipitation, evaporation, infiltration, and plant uptake. To improve agricultural practices, it is important to develop effective mathematical models that facilitate the analysis of soil moisture dynamics. This, in turn, will enable accurate determination of the need for additional irrigation at optimal times.

The aim of this work is to form a mathematical model of changes in soil moisture dynamics taking into account irrigation in the form of pulse action, which allows to establish optimal time for irrigation, and therefore - to increase the efficiency of water use in precision agriculture. Methodology and results consist in the application of a differential equation with pulse action to consider pulse irrigation under the conditions of achieving the required level of drainage (i.e. dehumidification). The time points of reaching critical moisture levels that require the introduction of an irrigation pulse have been determined (for samples of different types of soils). The model presented in the work can be used for automated control of irrigation systems, assessment of the efficiency of moisture retention in different types of soils, as well as for optimization of agrotechnical measures in precision agriculture. Scientific novelty and practical significance lie in the proposed pulse mathematical model of moisture dynamics, which allows to accurately formalize the moments of necessary irrigation. The results can be used to create automated irrigation control systems in precision agriculture, reducing water waste and increasing yields.

Keywords: humidity modeling, pulse humidification, differential equations.

Постановка проблеми. Точне землеробство стало однією з найважливіших складових у сучасному аграрному виробництві. Сьогодні цифрові технології, геоінформаційні системи (ГІС) та супутниковий моніторинг стають невід'ємною частиною процесу вирощування сільськогосподарських культур. Це дозволяє не тільки підвищити ефективність виробництва, а й забезпечити стійке використання природних ресурсів.

Однією з ключових тем, що потребує уваги в рамках точного землеробства, є контроль вологості ґрунту [5; 7; 8; 9]. Цей показник безпосередньо впливає на рівень урожайності, ефективність використання водних ресурсів, а також на загальний стан агроєкосистеми. Якщо вологи недостатньо, можна зіткнутися зі значним зниженням урожайності, а надмірна волога може спричинити вимивання важливих поживних речовин та навіть ерозію ґрунту. Тому дуже важливо розуміти, як змінюється вологість під впливом різних факторів – опадів, випаровування, інфільтрації та споживання рослинами.

Для покращання агропрактик важливо розробити ефективні математичні моделі, які сприятимуть аналізу змін вологості ґрунту. Це, у свою чергу, дозволить точно визначити необхідність додаткового зрошення в оптимальні терміни.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження у галузі моделювання вологості ґрунту та імпульсних впливів на зрошення проводила низка вчених. Наприклад, у [14] детально представлено концептуальні основи управління поливами при зрошенні з використанням систем підтримки прийняття рішень. На підставі аналізу та досліджень, проведених як вітчизняними, так і закордонними авторами, доведено, що ефектив-

ність управління поливами значною мірою залежить від методологічних підходів, застосовуваних для визначення строків і норм поливу в різних системах підтримки прийняття рішень. Обґрунтовано, що реалізація таких зрошувальних режимів можлива лише за умови використання систем підтримки ухвалення рішень із впровадженням геоінформаційних технологій. У цих системах поєднуються гідрогеологічні моделі розрахунку та прогнозування строків і норм поливу, що ґрунтуються на потенціалі ґрунтової вологи як критерію рівня вологозабезпечення, а також доступності цієї вологи для рослин у сполученні з даними дистанційного зондування землі (ДЗЗ).

У [2] представлено двовимірне математичне моделювання водного режиму ґрунту за краплинного зрошення. Розроблено методику прогнозування динаміки вологості ґрунту за краплинного зрошення на основі математичного моделювання згідно з рівнянням Річардса у термінах напорів у двовимірній постановці.

Моделювання водного режиму ґрунту та водного балансу в експерименті з пересаджуванням рису за умов зменшеного зрошення розглянуто у [12; 13].

Математичні моделі фільтраційних процесів у [3] проаналізовано з метою вивчення поведінки ґрунтових вод в екологічних (паводки, підтоплення територій) та технологічних (видобування сланцевого газу) аспектах. Для опису вказаних процесів використано моделі Дарсі та Форхгеймера із сталими коефіцієнтами, реалізований чисельний метод розв'язання відповідних систем.

У праці [16] здійснено математичне моделювання зміни рівня ґрунтових вод з урахуванням впливу штучних покриттів поверхні ґрунту і евапотранспірації.

Постановка завдання. Наше завдання – побудова математичної моделі зміни динаміки вологості ґрунту з урахуванням імпульсних поливів, що описується диференціальним рівнянням з імпульсною дією [15]; отримання аналітичного розв’язку, який описує поведінку вологості між імпульсами та визначає момент часу, коли необхідно виконати полив.

Модель, представлена в дослідженні, може бути використана для автоматизованого керування зрошувальними системами, оцінки ефективності утримання вологи в різних типах ґрунтів, а також для оптимізації агротехнічних заходів у точному землеробстві. Запропонована модель орієнтована насамперед на культури з контрольованим зрошенням (овочеві культури, ягідники, сади, газони), де критичні пороги вологості добре формалізовані та контролюються автоматизованими системами.

Отже, необхідно аналітично записати зміну динаміки вологості ґрунту з урахуванням імпульсних поливів та знаходження часового моменту поливу.

Виклад основного матеріалу. Для виведення диференціального рівняння, що описує зміну вологості ґрунту $W(t)$ [1, с. 67] з урахуванням імпульсної дії, скористаємось основним балансом води в ґрунті:

$$\frac{dW}{dt} = P(t) - E(t) - R(t),$$

де: $W(t)$ – вологість ґрунту, [мм] води в ґрунті; $P(t)$ – надходження вологи (опаді, полив) [мм/год]; $E(t)$ – випаровування, [мм/год]; $R(t)$ – поверхневий стік [мм/год].

Припустимо, що втрати вологи відбуваються пропорційно поточній вологості:

$$E(t) + R(t) = \lambda \cdot W(t), \quad \lambda > 0,$$

де λ – узагальнений коефіцієнт швидкості втрат вологості [день⁻¹].

Якщо припустити, що випаровування та інфільтрація відбуваються пропорційно вологості W , а надходження води здійснюється у вигляді імпульсних впливів (тобто зрошення в певні моменти часу, коли вологість досягає певного критичного значення W_{\min}), то математичну модель такого процесу можна записати у вигляді:

$$\frac{dW}{dt} = \lambda W(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (1)$$

$$W(t_0) = W_0 \quad (2)$$

де W_0 – початковий (встановлений нами) рівень вологості. Тоді:

$$W(t+0) - W(t-0) = I_0, \quad \text{коли } W(t-0) = W_{\min} \quad (3)$$

W_{\min} [мм] – критичний рівень вологості ґрунту, при якому необхідне втручання; I_0 [мм] – величина додаткової подачі води у часові моменти, коли рівень вологості досягнув критичного W_{\min} .

Споживання води рослинами не виділяється в окремий доданок, а входить до узагальненого коефіцієнта втрат вологості λ , який інтегрує евапотранспірацію, інфільтраційні втрати, водоспоживання рослин. Такий підхід відповідає першому рівню математичного моделювання, коли система описується з мінімальною кількістю параметрів. Коефіцієнт λ має чітку фізичну інтерпретацію – інтегральна швидкість втрат вологості ґрунту (обернена характерному часу висихання). Розмірність [день⁻¹] означає частку вологи, що втрачається за одиницю часу.

Розв’язки задачі (1)-(3) поділяються на дві групи: без імпульсної дії, з імпульсами – якщо вологість зменшується та досягає критичного рівня. Імпульси можуть здійснюватися: один раз – якщо після підливу система не повернеться до W_{\min} ; нескінченну кількість разів – якщо після кожного підливу вологість знову спадає до критичного рівня. Останній випадок є найбільш значущим для автоматизації.

Розв’язки задачі (1)-(3) можна поділити на два типи:

1) такі, що не зазнають імпульсного впливу.

У такому разі полив не відбувається, оскільки вологість у початковий момент часу нижча за значення W_{\min} . Це можливо для випадків:

– якщо $W_0 < W_{\min}$ та коефіцієнт $\lambda < 0$;

– якщо $W_0 \geq W_{\min}$ та коефіцієнт $\lambda > 0$;

2) такі, що зазнають імпульсної дії.

У такому разі вологість з плином часу зменшується і в певний момент досягає значення W_{\min} . Це можливо:

– якщо $W_0 < W_{\min}$ та коефіцієнт $\lambda > 0$;

– якщо $W_0 \geq W_{\min}$ та коефіцієнт $\lambda < 0$.

Більше того, після виконання однієї з умов пункту 2) імпульсна дія (тобто полив) здійснюватиметься один раз:

– якщо $W_0 < W_{\min}$, коефіцієнт $\lambda > 0$ та $I_0 > W_{\min}$;

– якщо $W_0 \geq W_{\min}$, коефіцієнт $\lambda < 0$ та $I_0 < W_{\min}$ або полив відбуватиметься нескінченну кількість разів:

– якщо $W_0 < W_{\min}$ в умові (2), коефіцієнт $\lambda > 0$ та $I_0 < W_{\min}$;

– якщо $W_0 \geq W_{\min}$ в умові (2), коефіцієнт $\lambda < 0$ та $I_0 > W_{\min}$.

Цікавий для розгляду варіант, коли імпульсна дія (імпульсний полив) здійснюється нескінченну кількість разів. Розглянемо випадок, коли в умові (2) $W_0 \geq W_{\min}$, у рівнянні (1) коефіцієнт $\lambda < 0$ та $I_0 > W_{\min}$.

Отже, побудуємо розв'язки задачі (1)-(3), що описує зміну вологості ґрунту з урахуванням її поступового зменшення внаслідок випаровування, та поливів (імпульсів), у моменти, коли вологість досягла критичного значення. Тобто розглядаємо диференціальне рівняння, яке описує процес зменшення вологості між імпульсами, а також умову, яка задає стрибок (імпульс) вологості в момент надходження води. Запишемо загальний розв'язок задачі (1)-(3) та формулу, з якої можна знайти часовий момент, коли необхідно полити, що дозволить, аналізуючи погодні умови, планувати полив. Результати досліджень сформулюємо у вигляді леми.

Лема. Розв'язок $W(t)$ задачі з імпульсною дією (1)-(3) для $t \in [t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), коли $W_0 \geq W_{\min}$ в умові (2), коефіцієнт $\lambda < 0$ та $I_0 > W_{\min}$ має вигляд

$$W(t) = W_{\min} e^{\lambda(t-t_0)} + I_0 \sum_{j=1}^k e^{\lambda(t-t_j)}, \quad (4)$$

моменти часу t_{k+1} визначаються з рівняння

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{W_{\min}}{W_{\min} + I_0} \right| = \\ &= t_1 - \frac{k}{\lambda} \ln \left| 1 + \frac{I_0}{W_{\min}} \right|, \quad k = 1, 2, \dots \\ t_1 &= t_0 + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{W_{\min}}{W_0} \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Доведення. Розв'язок задачі (1)-(3) для $t \in [t_0, t_1)$ має вигляд

$$W(t) = W_0(t) e^{\lambda(t-t_0)}$$

Експоненціальний закон зміни вологості широко застосовується в агрогідрологічних моделях як лінійне наближення процесів евапотранспірації та інфільтрації за умови сталих зовнішніх факторів.

Часовий момент t_1 першої імпульсної дії, тобто момент першого поливу, знаходимо з рівняння

$$W_0 e^{\lambda(t_1-t_0)} = W_{\min}, \quad (6)$$

звідки

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{W_{\min}}{W_0} \right|.$$

Розв'язок рівняння (6) впливає з того, що згідно з постановкою задачі $\lambda < 0$ та $W_0 \geq W_{\min}$.

З урахуванням умови (3) розв'язуємо (1) з початковими даними:

$$W(t) = W_0 e^{\lambda(t-t_0)} + I_0$$

та одержуємо розв'язок задачі (1)-(3) для $t \in [t_1, t_2)$:

$$W(t) = W_{\min} e^{\lambda(t-t_0)} + I_0 e^{\lambda(t-t_1)}.$$

Знаходимо наступний момент імпульсної дії t_2 ($t_2 > t_1$) із співвідношення

$$W_{\min} e^{\lambda(t_2-t_0)} + I_0 e^{\lambda(t_2-t_1)} = W_{\min}.$$

Після перетворень одержимо

$$t_2 = t_1 - \frac{1}{\lambda} \ln \left| 1 + \frac{I_0}{W_{\min}} \right|. \quad (7)$$

З того, що $\lambda < 0$ та $I_0 > W_{\min}$, співвідношення (7) логічне.

Тоді, для $t \in [t_2, t_3)$ розв'язок задачі (1)-(3) запишемо за допомогою співвідношення

$$W(t) = W_{\min} e^{\lambda(t-t_0)} + I_0 \sum_{j=1}^2 e^{\lambda(t-t_j)},$$

а момент часу для знаходження t_3 знаходимо з

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{W_{\min}}{W_{\min} + I_0} \right| = t_1 - \frac{2}{\lambda} \ln \left| 1 + \frac{I_0}{W_{\min}} \right|. \quad (8)$$

Продовжуючи міркування далі, переконуємося у справедливості формул (4) та (5). А моменти імпульсів формують послідовність (4) часо-періодичних осциляцій рівня вологості, яка повністю контрольована трьома параметрами: λ , W_{\min} , I_0 .

Розглянемо вологість $W(t)$, аналізуючи, для зручності її зміни у [%] та (для наочності) застосовуючи як стартову точку первинний (встановлений нами) рівень вологості W_0 [%], відзначений після того, як ми здійснили полив на I_0 [%] (рис. 1).

Як приклад, покажемо модель для різних параметрів: λ [день⁻¹]. Таке (конкретне) значення інтенсивності випаровування та інфільтрації є модельним (абстрактним) коефіцієнтом, але їх порядок величин узгоджується з діапазонами для вказаних типів ґрунтів у наданій таблиці, реальні ж значення регіонально та темпорально залежні, зокрема від температури, вологості повітря, мульчування тощо, та зазвичай визначаються експериментально.

Утім конкретні обрані значення (табл.) містяться в характеристичному діапазоні для цих ґрунтів та обрані на основі аналізу джерел [4; 6; 10; 11].

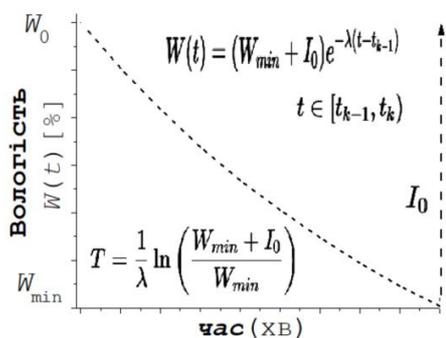


Рис. 1. Схема базової моделі змін вологості

$W(t) = W_0 \cdot e^{-\lambda(t_0 - t_{k-1})}$
при імпульсному підливі на $t \in [t_0, t_{k-1})$

I_0 , що відбуватиметься при досягненні значень W_{min} із періодом T

Fig. 1. Scheme of the basic model of moisture dynamics

$W(t) = W_0 \cdot e^{-\lambda(t_0 - t_{k-1})}$
under pulse irrigation at $t \in [t_0, t_{k-1})$

intensity I_0 , which is triggered when the soil moisture level reaches W_{min} with a period T

Значення λ , наведені в таблиці, не є експериментальними константами, а модельними параметрами, вибраними в характерних діапазонах для відповідних типів ґрунтів згідно з літературними даними. λ є узагальненим параметром; конкретні значення треба уточнювати експериментально для кожного регіону.

Використаємо дві форми подання вологості ґрунту: абсолютна – у вигляді еквівалентного шару води (мм), що застосовується при аналітичному виведенні математичної моделі, та відносна – у відсотках (%), яка використовується для наочного представлення результатів моделювання.

Перехід від абсолютної вологості $W(t)$ [мм] до відносної вологості $w(t)$ [%] здійснюється шляхом нормування відносно максимальної вологості ґрунту W_{max} [мм] за формулою:

$$w(t) = \frac{w(t)}{w_{max}} \cdot 100 \% \quad (9)$$

Відповідно, зворотне перетворення має вигляд:

$$W(t) = \frac{w(t)}{100} \cdot W_{max} \quad (10)$$

де: $W(t)$ – абсолютна вологість ґрунту, мм; $w(t)$ – відносна вологість ґрунту, %; W_{min} , w_{min} – відповідно, критичні рівні вологості в абсолютній та відносній шкалах.

Величина імпульсного зрошення I_0 у фізичному сенсі відповідає додатковому шару води, який вноситься у ґрунт у момент поливу, та в абсолютній шкалі має розмірність [мм]. При переході до відсоткової шкали імпульс зрошення нормується аналогічно та визначається як:

$$i_0 = \frac{I_0}{w_{max}} \cdot 100 \% \quad (11)$$

де i_0 – відносна величина імпульсного зволоження, %.

Використання відсоткової шкали – лише форма представлення результатів і не змінює структури диференціального рівняння та умов імпульсної дії, а всі параметри моделі мають чітке фізичне тлумачення та однозначний взаємозв'язок між абсолютною і відотною формами подання вологості ґрунту.

Розглянемо випадок, коли $w_{min} = 20\%$ – критичний рівень вологості, за якого потрібен імпульс. $i_0 = 30\%$ – величина імпульсного зрошення, однакова для всіх режимів.

Моделі може бути адаптована під різні типи культур шляхом налаштування параметрів моделі (критичний рівень вологості W_{min} , величина імпульсу I_0 , коефіцієнт втрат λ).

Моделювання зміни вологості ґрунту виконане на основі розробленої математичної моделі, яка описує процес висихання ґрунту у проміжках між поливами та враховує імпульсну дію зрошення у моменти, коли вологість досягає критичного рівня W_{min} .

Для чисельного аналізу модель реалізовано у двох формах:

У абсолютних одиницях

$$\frac{dW}{dt} = \lambda W(t), t \in [t_0, +\infty)$$

У відсотковій формі

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w(t), t \in [t_0, +\infty)$$

Таблиця. Значення інтенсивності випаровування та інфільтрації для вказаних типів ґрунтів

Table. Values of evaporation intensity and infiltration for the specified soil types

Характеристика режиму	λ [день ⁻¹]	Тип ґрунту	Період T [хв]
Інтенсивне випаровування	14.4	Піщані, супіщані	91.6
Стандартні умови	7.2	Суглинки, легкі глинисті	183.2
Повільне висихання	2.88	Глинисті, торф'яні	458

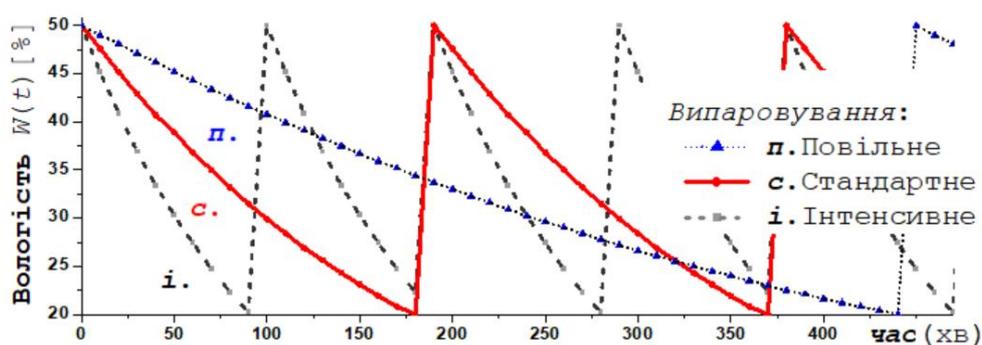


Рис. 2. Значення вологості $w(t)$ для трьох режимів випаровування, де, якщо вологість досягає $w_{\min} = 20\%$, то виконується імпульс зволоження i_0 , зумовлюючи стрибоку зміну вологості до $w(t) = 50\%$

Fig. 2. Values of soil moisture $w(t)$ for three evaporation regimes, where, under the condition that the moisture reaches $w_{\min} = 20\%$, an irrigation pulse i_0 is applied, causing a stepwise change in moisture to $w(t) = 50\%$.

У рамках моделювання розглянуто декілька типових значень λ , що відповідають різним умовам навколишнього середовища: помірне, середнє та інтенсивне висихання. Кожному сценарію відповідає певний період імпульсів поливу T . Моделювання виконували до встановлення періодичного режиму, коли послідовність імпульсів стає регулярною, а динаміка вологості в кожному циклі повторюється.

Для підтвердження коректності моделі проведено серію чисельних експериментів з використанням таких вихідних даних:

- максимальна вологоємність ґрунту: $W_{\max} = 100$ мм;
- критичний рівень: $w_{\min} = 20\%$;
- імпульс зрошення: $i_0 = 30\%$, тобто $I_0 = 0,3 W_{\max} = 30$ мм;
- три режими втрат вологи: режим 1 – повільне висихання; режим 2 – середнє висихання; режим 3 – інтенсивне висихання.

Симуляції виконано у середовищах MATLAB, Python (NumPy + Matplotlib) та Simulink, що дозволило перевірити інваріантність моделі і незалежність структури процесу від одиниць вимірювання.

Для кожного сценарію визначено: час досягнення критичного рівня t_k ; період сталого циклу поливу T ; мінімальні та максимальні значення вологості в циклі; форму траєкторії $W(t)$ та $w(t)$. Отримані результати чітко демонструють відповідність поведінки моделі фізичним процесам висихання ґрунту та підтверджують аналітичні характеристики системи. У всіх трьох сценаріях система переходить у періодичний режим, коли: поливи відбуваються через строго однаковий проміжок

часу, траєкторії $W(t)$ та $w(t)$ стають циклічними, аналітичний період T збігається з чисельним. Це підтверджує правильність імпульсного опису та структури моделі dissipative + impulsive system.

Графіки (рис. 2) показують: експоненційний спад вологості між подіями поливу; стрибок вологості у момент імпульсу; чітке досягнення рівня w_{\min} у точках поливу; однакову форму циклу в різних сценаріях – різняться лише швидкість. Форма кривих у % і мм повністю збігається після лінійного масштабування, що підтверджує інваріантність моделі.

Запропонована модель не суперечить концепції диференційного внесення, а навпаки, є її математичним ядром. Імпульсна дія в моделі інтерпретується як локальне зрошення, ініційоване показами датчиків вологості ґрунту, що є типовим для систем точного землеробства та крапельного зрошення. У цьому контексті моменти імпульсів t_k відповідають моментам, коли сенсори фіксують досягнення критичного рівня W_{\min} ; величина імпульсу I_0 відповідає нормі локального поливу для конкретної зони поля.

Висновки. Запропонована математична модель імпульсного зрошення може бути ефективно інтегрована в системи точного землеробства. Модель дозволяє не лише прогнозувати зміни вологості ґрунту з часом, а й визначати оптимальні моменти для зволоження з метою уникнення надмірного або недостатнього зрошення.

При інтеграції цієї моделі з геоінформаційними системами (ГІС) можливо отримати просторову картину розподілу вологості на території поля, враховуючи неоднорідність ґрунтів,

рельєф, попередню обробку та мікроклімат. Це дає аграріям змогу ухвалювати більш обґрунтовані рішення щодо зонування полів, управління водними ресурсами та оптимізації витрат на зрошення, забезпечуючи при цьому високу врожайність.

Теоретична та практична значущість дослідження полягає у розробці науково обґрунтованого підходу до управління зрошенням, що поєднує точність аналітичних методів із можливостями сучасних геоінформаційних технологій. Отримані результати можуть бути використані для створення інтелектуальних систем управління агротехнологіями нового покоління.

Наукова новизна та практична значущість полягають у запропонованій імпульсній математичній моделі динаміки вологості, що дозволяє точно формалізувати моменти необхідного поливу. Результати можуть бути використані для створення систем автоматизованого управління зрошенням у точному землеробстві, зменшуючи перевитрати води та підвищуючи урожайність.

Модель, представлена в дослідженні, може бути використана для автоматизованого керування зрошувальними системами, оцінки ефективності утримання вологи в різних типах ґрунтів, а також для оптимізації агротехнічних заходів у точному землеробстві.

Перспектива подальших досліджень передбачає більш щільну взаємодію з ГІС та інтеграцію у модель просторової картини розподілу вологості на території поля. Більш детальне моделювання має охоплювати часозалежний коефіцієнт $\lambda(t)$ або окрему функцію водоспоживання культури залежно від фази росту.

Бібліографічний список

1. Булигін С. Ю., Вітвіцький С. В. Агрофізика ґрунту: підручник. Київ: Видавництво, 2021. 315 с. URL: <https://dglib.nubip.edu.ua/server/api/core/bitstreams/817910f2-7ded-4501-a92a-6932b9d95a51/content> (дата звернення: 20.01.2025)
2. Ромашенко М. І., Богаєнко В. О., Білоброва А. С. Двовимірне математичне моделювання водного режиму ґрунту за краплинного зрошення. *Вісник аграрної науки*. 2021. Т. 99, № 4. <https://doi.org/10.31073/agrovisnyk202104>.
3. Токар М. В., Гаврилук В. І. Математичне моделювання фільтраційних процесів в областях з невизначеними ділянками меж за наявності водозабору. *Наука, освіта, суспільство очима молодих: матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. студентів та молодих науковців*. Ч. 2. Рівне, 2013. С. 46–47. URL: <http://repository.rshu.edu.ua/id/eprint/5761/1/Токар%20М.В.%2C%20Гаврилук%20В.І.pdf> (дата звернення: 20.01.2025)
4. Abolafia-Rosenzweig R., Zhang L., Zreda M., Walker J. P., Moghaddam M. Soil moisture data assimilation to estimate irrigation water. *Remote Sensing*. 2019. Vol. 11, No. 22. DOI: 10.3390/rs11223754.
5. Albano R., Martinez S., Rodríguez L., Gutiérrez J. MY SIRR: minimalist agro-hydrological model for assessing water requirements and agricultural production. *Computers and Electronics in Agriculture*. 2017. Vol. 144. P. 123–133. DOI: 10.1016/j.compag.2017.05.009.
6. Allen R. G., Pereira L. S., Raes D., Smith M. *Crop Evapotranspiration: Guidelines for Computing Crop Water Requirements*. FAO Irrigation and Drainage Paper No. 56. Rome: FAO, 1998.
7. Debnath S., Agyeman B. T., Sahoo S. R., Yin X., Liu J. Performance triggered adaptive model reduction for soil moisture estimation in precision irrigation. *ArXiv preprint*. 2024. arXiv:2404.01468.
8. Duque-Marín E., Rojas-Palma A., Carrasco-Benavides M. Soil water indicator for a dynamic model of crop and soil water interaction. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2023. Vol. 20, No. 8. P. 13881–13899. DOI: 10.3934/mbe.2023618.
9. Gan P., Zhang Z., He X. et al. A Django-based modeling platform for predicting soil moisture. *Water*. 2025. Vol. 17, No. 12. P. 1753. DOI: 10.3390/w17121753.
10. Hillel D. *Environmental Soil Physics*. Academic Press, 1998.
11. Jury W. A., Horton R. *Soil Physics*. 6th ed. John Wiley & Sons, 2004.
12. Li Y., Simunek J., Jirka J., Wang S., Yuan J., Zhang W. Modeling of Soil Water Regime and Water Balance in a Transplanted Rice Field Experiment with Reduced Irrigation. *Water*. 2017. Vol. 9. P. 248. <https://doi.org/10.3390/w9040248>
13. Pezij M., Addiscott T. Applying transfer function-noise modelling to characterize unsaturated zone conditions. *Journal of Hydrology*. 2020. (Article). (in press).
14. Romashchenko M., Bohaienko V., Shatkovskiy A., Matyash T., Kolomiets S., Shevchuk S., Danylenko Yu., Sardak A. Концептуальні засади управління поливами при зрошенні. *Меліорація і водне господарство*. 2022. С. 5–17. DOI: 10.31073/mivg202201-328.
15. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations*. Vol. 14. Singapore: World Scientific, 1995. 462 p.
16. Serikova E., Strelnikova E. Математичне моделювання фактору евапотранспірації при зміні рівня ґрунтових вод міських територій. *Applied Questions of Mathematical Modeling*. 2019. № 2. С. 65–77. DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.6.

Стаття надійшла 24.01.2025