

АНАЛІЗ УСТАЛЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО СКІН-ЕФЕКТУ В ОБХІД КРИВИХ ЕМДЕ

Василь Чабан^{1,2}, д. т. н., Андрій Герман¹

¹Львівський національний аграрний університет,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: v1z4d5@gmail.com

²Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Україна,
e-mail: v1z4d5@gmail.com

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2018.01.148>

Постановка проблеми. В агропромисловому комплексі найширше застосування мають короткозамкнуті асинхронні двигуни, в обмотках ротора яких вихрові магнетні поля виконують безпосередні робочі функції. Це явище отримало назву електричного скін-ефекту, або поверхневого ефекту [1; 2], у результаті якого густина струму в поперечному перерізі провідника розподіляється нерівномірно. За таких умов поняття омичного опору провідника втрачає фізичний зміст і виникає потреба звертатися до теорії електромагнетного поля.

Свого часу проблему врахування електричного скін-ефекту ми розв'язали в загальному вигляді. Але в даній роботі йдеться про значно вужче питання – електромагнетного процесу, збудженого гармонічною хвилею синусоїдального струму.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Уперше теорія електричного і магнетного скін-ефекту, побудована на строгій математичній основі диференціальних рівнянь квазістаціонарного електромагнетного поля, була розроблена нами [2; 7]. До того використовувалися лише неадекватні натурі заступні рекурентні кола, які заступали масивний провідник і були позбавлені критеріїв знаходження їхніх параметрів – резисторів та індуктивностей. Що стосується гармонічного (усталеного) скін-ефекту, то його аналітична теорія, одержана на підставі рівнянь квазістаціонарного електромагнетного поля, давно розроблена Емде [6; 8]. Він показав, що при заданій частоті струму зміна активного й внутрішнього індуктивного опорів провідника є функцією лише глибини паза. Ці результати, подані графічно через їхню складність, відомі як криві Емде. На жаль, ці криві досі широко використовують на практиці, навіть у недозволених випадках – аналізу

перехідних процесів, де про синусоїдальність струмів не може йтися!

Постановка завдання. Самостійний інтерес становить метод розрахунку поверхневого ефекту в прямокутному пазу у випадку гармонічної електромагнетної хвилі синусоїдального струму. Ми покажемо, що, користуючись запропонованим нами методом розрахунку поверхневого ефекту, виходячи із запропонованого методу обчислення напруженості електричного поля на поверхні провідника, можна одержати дуже простий аналітичний розв'язок, який виражається елементарною гіперболічною функцією комплексної змінної.

Виклад основного матеріалу. На практиці дуже часто виникає електромагнетний процес, коли всі величини, що характеризують його інтенсивність, залежать лише від однієї просторової координати. Задача аналізу такого процесу одержала назву одновимірної просторової. Рівняння електромагнетного поля в такому разі значно спрощуються, бо дві просторові похідні зникають, а це спрощує аналіз. Фізичний процес звести до одновимірної просторової задачі вдається, як правило, правильно вибравши систему координат, декартових, циліндричних тощо.

На рисунку зображено геометрію прямокутного глибокого паза короткозамкнutoї обмотки ротора асинхронного мотора, зробленого у феромагнетному матеріалі. Електромагнетний процес у пазу генерує заструмлений електричний провідник. Систему ортогональних декартових координат з центром на поверхні провідника вибрано так, що вісь x скеровано вздовж провідника, вісь y – поперек паза, а вісь z – углиб паза.

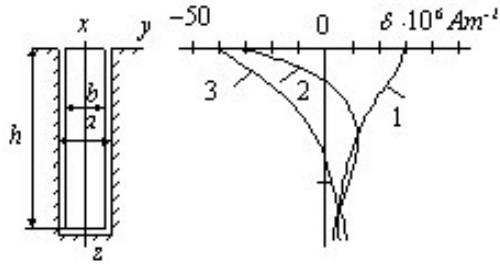


Рис. Переріз глибокого прямокутного паза і розрахункові криві густини струму при вмиканні електричного контуру ($r = 0,2 \cdot 10^{-5}$ Ом; $L = 0,445 \cdot 10^{-6}$ Г; $a = b = 0,003$ м; $h = 0,036$ м; $l = 0,125$ м на джерело ЕРС $e = 0,4(1 - \exp(-100t)) \sin 314t$ у моменти часу: 1 – 0,010 с; 2 – 0,015 с; 3 – 0,020 с; a – ширина паза, b , h , l – ширина, висота й довжина провідника)

Fig. The section of the deep rectangular groove and the gap-curve of the current density at the switching of the electric circuit ($r = 0,2 \cdot 10^{-5}$ Ohm; $L = 0,445 \cdot 10^{-6}$ H; $a = b = 0,003$ m; $h = 0,036$ m; $l = 0,125$ m on the source of the EMF $e = 0,4(1 - \exp(-100t)) \sin 314t$ at the time: 1 – 0,010 s; 2 – 0,015 s; 3 – 0,020 s; a – width of the groove, b , h , l – width, height and length of the conductor)

Паз вважаємо безмежно довгим і достатньо вузьким. За таких геометричних розмірів електромагнетний процес у будь-якому перерізі паза, перпендикулярному до осі x , буде однаковим. Такі поля одержали назву плоскопаралельних. Оскільки паз є достатньо вузький, то вважатимемо, що електромагнетний процес незалежний також і від y -ї координати.

Задля спрощення вважатимемо, що кусково-однорідні середовища лінійні, тобто характеристики всіх задіяних середовищ лінеаризуються:

$$D = eE; \quad H = uB; \quad d = gE, \quad (1)$$

де D, E – модулі векторів електричного поля; B, H – модулі векторів магнетного поля; d – модуль вектора густини струму; e, u, g – діелектрична проникність, релуктивність і питома електропровідність.

Оскільки струм протікає лише за віссю x , то вектори електричного поля мають лише x -ї компоненти:

$$d = x_0 d, \quad E = x_0 E, \quad D = x_0 D. \quad (2)$$

Якщо взяти до уваги реальні значення релуктивностей повітря n_0 і феромагнетика n_{Fe} : ($n_0 \gg n_{Fe}$), то доходимо висновку, що лінії магнетного поля в повітрі будуть майже перпенди-

кулярні до межі. У випадку ідеального феромагнетика ($n = 0$) вони будуть цілком перпендикулярними. За таких умов матимемо

$$H = y_0 H; \quad B = y_0 B. \quad (3)$$

Зіставляючи вирази (2) і (3), бачимо, що вектори електричного і магнетного полів утворюють між собою просторовий кут 90° . В одновимірних просторових задачах у декартових координатах така орієнтація електричного і магнетного полів є характерною. Відповідний електромагнетний процес називають плоскою хвилею. Поширюється ця хвиля, згідно з вектором Пойнтинга $E \times H$ за третьою координатою z , углиб паза.

Аналіз проводимо за рівняннями Максвелла

$$\nabla \times H = gE + \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4)$$

які у квазістационарному наближенні ($e = 0$) за умов (2), (3) набувають відповідно вигляду

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{b}{a} g E; \quad -\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{n_0} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5)$$

Виключивши з (5) E , одержимо розрахункове рівняння у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a n_0}{b g} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (6)$$

Початкові умови вважатимемо заданими, а крайові знайдемо на підставі закону Ампера

$$\oint H dl = i, \quad (7)$$

де i – струм провідника паза.

Нехтуючи магнетною напругою у феромагнетіку, згідно з (7), одержуємо

$$H(0) = i/a; \quad H(h) = 0. \quad (8)$$

Якщо в пазу міститься декілька провідників, то крайові умови для m -го з них, починаючи з дна паза, згідно зі (7) будуть [8]:

$$H(0) = \sum_{k=1}^m i_k / a; \quad H(h_m) = \sum_{k=1}^{m-1} i_k / a, \quad (9)$$

де h_m – висота m -го провідника. При $m = 1$ (8) і (9) збігаються.

Виберемо замкнутий контур у площині xOz таким чином, щоб він проходив по поверхні провідника вздовж його пазової частини l , по торці цієї частини, потім у зворотному напрямку на деякій фіксованій глибині x та знову по торці. Для цього контуру запишемо закон Фарадея

$$\oint E dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (10)$$

у результаті чого матимемо

$$E(0)l = E(x)l + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x). \quad (11)$$

Тут Φ – внутрішній магнетний потік провідника, охоплений вибраним контуром інтегрування.

Ліва і права частини виразу (11) виражають напругу u пазової частини провідника. Зрозуміло, що значно простіше обчислити цю напругу за лівою частиною, аніж за правою. Тому запишемо остаточно [3–5; 9–20]:

$$u = E(0)l. \quad (12)$$

Потрібну напруженість електричного поля знайдемо згідно з другим виразом (5):

$$E = -\frac{1}{g} \frac{a}{b} \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (13)$$

Вирази (6), (8), (12), (13) при заданих початкових умовах $H(z,0)$ утворюють крайову задачу аналізу перехідного скін-ефекту в глибокому прямокутному пази електричної машини [4; 5]. Розв'язується вона числовими методами дискретної математики.

У [9] показано, що вираз (12), виходячи з електромагнетних аналогій $u \rightarrow V, E \rightarrow H$, де V – магнетна напруга, інтегрально описує магнетний скін-ефект

$$u = H(0)l. \quad (14)$$

Але оскільки в нашому дослідженні йдеться про усталений гармонічний процес, то розв'язок (6), (8), (12), (13) можна порівняно просто отримати аналітично в комплексному просторі, з наступним переходом у часовий простір за відомим виразом

$$x = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\mathcal{X} e^{j\omega t}). \quad (15)$$

У випадку гармонічного збудження задіяний у (8) струм має вигляд

$$i = I_m \sin(\omega t + \gamma) \rightarrow \mathcal{I} = I e^{j\gamma}, \quad (16)$$

де $j = \sqrt{-1}$; ω – циклічна частота.

Алгебраїзуючи (6) у комплексному просторі, одержимо

$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - j \frac{b}{a} \omega m g \mathcal{H} = 0; \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{g} \frac{a}{b} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}, \quad (17)$$

причому $m = 1/u$ – магнетна проникність.

Граничні умови записуємо на підставі (8), (16)

$$\mathcal{H}(0) = \mathcal{I} a; \quad \mathcal{H}(h) = 0. \quad (18)$$

Повний інтеграл першого рівняння (17) буде

$$\mathcal{H} = A e^{-\mathcal{B}z} + B e^{\mathcal{B}z}, \quad (19)$$

де \mathcal{B} – модуль коренів характеристичного рівняння

$$\mathcal{B} = (1 + j) \sqrt{\frac{1}{2} \frac{b}{a} \omega m g}. \quad (20)$$

Сталі інтегрування у (19) знаходимо в результаті сумісного розв'язання (18), (19) за умов $z=0, z=h$

$$A = \frac{\mathcal{I} e^{bh}}{a(e^{bh} - e^{-bh})}; \quad B = \frac{\mathcal{I} e^{-bh}}{a(e^{bh} - e^{-bh})}. \quad (21)$$

Підставляючи (21) у (19), знаходимо комплексне відображення вектора напруженості магнетного поля

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{I}}{a \operatorname{sh} \mathcal{B}h} \operatorname{sh}(\mathcal{B}(h-z)). \quad (22)$$

Комплексне відображення вектора напруженості електричного поля знайдемо за похідною (17)

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{I} \mathcal{B}}{a \operatorname{sh} \mathcal{B}h} \operatorname{ch}(\mathcal{B}(h-z)). \quad (23)$$

Напругу на пазовій частині провідника знаходимо згідно з (12), (23) за умови $z=0$:

$$\mathcal{U} = z \mathcal{E}, \quad (24)$$

де

$$z = R_0 \mathcal{B} h \operatorname{cth} \mathcal{B}h; \quad R_0 = l/(g b h), \quad (25)$$

причому R_0 – омичний опір пазової частини провідника постійному струмові.

Вираз (24) – комплексне рівняння резистора на випадок наявності електричного скін-ефекту. Імпеданс z складається не тільки з омичного опору провідника, а й з індуктивного, зумовленого внутрішнім магнетним потоком (11).

Якщо комплексний опір (24) розкласти на дійсну й уявну частини, то можна прийти до результату, одержаного Емде. Але він буде настільки складний і настільки складними будуть перетворення, що нам теж доведеться вдатися до графічних побудов, аби зробити його доступним користувачеві. А це й будуть знамениті криві Емде.

У практичних розрахунках, виходячи з реальних параметрів стану, формулу (23) можна спростити:

$$z = R_0 \mathcal{B} h. \quad (26)$$

Точність виразу (26) зростає зі збільшенням циклічної частоти процесу.

Висновки. 1. Запропонований метод аналізу електричного скін-ефекту на підставі диференціальних рівнянь квазістаціонарного електромагнетного поля є універсальним і придатним до аналізу перехідних і усталених процесів. Але він орієнтований лише на числові методи дискретної математики.

2. Одержане нами правило про те, що явище електричного скін-ефекту інтегрально описується

станом вектора напруженості електричного поля на поверхні провідника, дало змогу достатньо просто представити гармонічний електричний скін-ефект у глибокому феромагнетному пазу в аналітичному вигляді через гіперболічну функцію.

3. Запропонований метод аналізу призначений суттєво спростити практичний аналіз усталених гармонічних процесів за наявності електричного скін-ефекту.

Бібліографічний список

1. Дачев А. Исследование на поверхности эффект в проводниці и отворени феромагнетни канали с помощта на заместаша схеми и електронни цифрови изчисл. Машины (ЕЦИМ). *Техн. мисли*. 1971. 8, № 6. С. 78–83.
2. Чабан В. Алгоритм расчета скин-эффекта в пазах электрических машин. *Электронное моделирование*. 1990. № 3. С. 103–105.
3. Чабан В. Електромагнетні процеси. Львів: Простір М, 2017. 412 с.
4. Чабан В. Методи нелінійної електротехніки. Львів: Світ, 1990. 168 с.
5. Чабан В., Чабан А., Бондар О. Комутаційний режим струмопроводу. *Технічні вісті*. 2000. № 1 (10)/2 (11). С. 69–71.
6. Шимони К. Теоретическая электротехника: пер. с нем. Москва: Мир, 1964. 774 с.
7. Czaban A., Czaban W., Rusek A., Lis M. Model matematyczny silnika synchronicznego z magnesami trwałymi typu PMSM z wykorzystaniem metod wariacyjnych. *Maszyny Elektryczne, Zeszyty Problemowe*. 2013. Nr. 1 (98). S. 177–182.
8. Emde F. Einseitige Stromferdrangung in ankernuten. *E. u. M.* 1908. Bd. 20, H. 33. S. 703–718; H. 34. S. 726–731.
9. Klingshirn E. A., Jordan H. E. Simulation of polyphase induction mashines with deep rotor bare. *IEEE Trans Power App. And Syst.* 1970. PAS 80, N 6. P. 58–67.
10. Mocanu C. I. Nichtstationare Stromverdrangung in einer maschinennut von rechtekigen Querschnitt. *A. f. E.* 1973. Bd. 55, H. 3. P. 164–170.
11. Padarew N., Jetschew D. Die Beistimmung der dynamischen Kennlinien von Asynchronmotoren unter Berücksichtigung der Sattigung und der Stromverdrangung mit Digitalrechnern. *Electric*. 1971. N 9. S. 132–141.
12. Probst R. Übergangsverdrangung von Asynchronmotoren mit Nutzumschaltung unter Berücksichtigung der Stromverdrangung in den Lapferstaben. *ETZ-A*. 1973. H-9. Bd. 94. S. 88–96.
13. Reichert K. Die numerische Berechnung Nutzst Steigung und der Wirbelströme in Nutenleitern elektrischer Maschinen. *A. f. E.* 1969. Bd. 53. H-2. S. 131–139.
14. Stepina J. Querströme in Kefiglaufer. *E. u. M.* 1975. Vol. 92, N 1. P. 8–14.
15. Tchaban V. New principle of building of mathematical models of electric devices. International conference on modelling and simulation MS'2001.: Proceedings, Lviv, May 23–26, 2001. Lviv, 2001. P. 17–18.
16. Tchaban V. Parametric sensitivity of three-phase induction motor. *Technical News*. 2014. 1(39), 2(40). P. 26–29.
17. Tchaban V., Kostiuchko S., Kwater T. Mathematical modeling of nonsymmetrical transient and steady-state processes of induction motors. *Computing in Science and Technology: monograph. Rzeszow: Agencja Rekl.-Wydawn. A. Grzegorzcyk*, 2012. P. 129–146.
18. Tchaban V., Labyak N. Mathematical modelling of transient processes of induction motors with massive rotor. *Modelling, Measurement and Control*. 1993. Vol. 51, No. 4. S. 37–41.
19. Tchaban V., Peleshko D. The mathematical model of inverter. *Przegląd elektrotechniczny*. 2012. Nr. 6. R. 88. S. 251–253.
20. Tchaban V., Bobytsky Y., Ivinski D. Mathematical model of elementary DC photomotor. *Proceedings of 2-nd International conference on intelligent knowledge systems (IKS-2005)*, July 06–08, 2005. TR-Kütahya, Turkey, 2005. P. 65–67.

Чабан В., Герман А.

АНАЛІЗ УСТАЛЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО СКІН-ЕФЕКТУ В ОБХІД КРИВИХ ЕМДЕ

У статті розглянуто наукову проблему врахування електричного скін-ефекту в пазах обмотки ротора короткозамкнених асинхронних двигунів як основних виконавчих пристроїв в енергетичних системах агропромислового комплексу. Оскільки в таких двигунах явище електричного скін-ефекту виконує безпосередні робочі функції, то воно повинно бути враховане у відповідних математичних моделях з високою точністю. Всебічний аналіз показав, що це можна зробити лише на підставі теорії квазістаціонарного електромагнетного поля, бо поняття теорії електричних кіл, такі як резистор та індуктивність, втрачають фізичний зміст. У роботі подано загальне розв'язання проблеми, а заодно завужене до випадку, коли фізичний процес збуджується гармонічною електромагнетною хвилею – заструмленого провідника синусоїдальним струмом.

В останньому випадку Ф. Емде зумів розв'язати задачу аналітично, виходячи з енергії електромагнетного поля. Але розв'язок при цьому має настільки складний вигляд, що його запропонувати стало можливим лише в графічному вигляді. У той час як наш, одержаний за значенням вектора напруженості електричного поля на поверхні провідника, виражається простою гіперболічною функцією. А це спрощує аналіз до найпростішого.

Ключові слова: короткозамкнутий асинхронний двигун, електричний скін-ефект, перехідний і усталений процеси, глибокий прямокутний паз, аналітичний розв'язок.

Tchaban V., Herman A.

**ANALYSIS OF STEADY-STATE HARMONIC ELECTRIC SKIN-EFFECT
IN THE BYPASS OF THE CURVES OF EMDE**

Execution deep bar cage induction motors play an important role in the national economy, both in industry and in the agro-industrial complex. The intense electric skin effect that occurs in such slots performs direct work functions. Therefore, the reproduction of the corresponding electromagnetic phenomenon in the process of mathematical modeling should be performed with a sufficient accuracy for practice. Since in this case the current is distributed unevenly across the conductor, then such a concept of the theory of electric tracks as the ohmic resistance of the conductor loses its physical meaning. Appropriate solutions can be obtained only on the basis of the theory of a quasistationary electromagnetic field. On this basis, we solved the problem in its general form. The resulting solutions are suitable for analysis of both transient and steady-state processes. Obtained with this boundary-value problem is suitable for analysis as of transient skin effect in the general case, and in the case of a deep rectangular slot of an electric machine is solved by numerical methods.

As is shown by F. Emde, there is an analytical solution in the jumble of a jumbled sinusoidal current of a rectangular deep slot that lies in ferromagnetics. He proceeded from the power of the electromagnetic field. But the solution thus has the complex appearance that it was possible to offer it to the user only in a graphical form known as the «curves of Emde». At that time, the solution we have proposed, obtained by the value of the electric field strength vector on the surface of the conductor, is expressed by a simple hyperbolic function of a complex variable.

If the complex resistance of the conductor obtained by us, which includes both the ohmic and internal inductive supports, is decomposed into real and imaginary parts, then we can come to the result obtained by Emde.

Key words: short-circuit asynchronous motor, electric skin effect, transient and steady-state processes, deep rectangular slot, analytical solution.

Стаття надійшла 22.11.2018