УДК 621.3.027.7

РОЗРАХУНОК КЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ ВИМУШЕННЯМИ

Дмитро Гречин, к. т. н., Іван Дробот, Андрій Герман
Львівський національний аграрний університет,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: hrechynd@ukr.net

https://doi.org/10.31734/agroengineering2018.01.140

Постановка проблеми. Розрахунок класичним методом перехідних процесів у лінійному стаціонарному електричному колі зводиться до формулювання і розв'язування задачі Коші, під якою розуміємо систему диференціальних рівнянь першого порядку, що описує процеси в даному колі, і сукупність початкових значень невідомих (так званих початкових умов), яка виділяє потрібний перехідний процес з множини можливих процесів у цьому колі [4–8; 14; 15; 17; 18].

Класичний метод є з математичного погляду найпростішим серед відомих методів розв'язування задачі Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, але практична реалізація останнього з перелічених етапів – формування лінійної системи алгебричних рівнянь для обчислення сталих інтегрування – є досить громіздкою і вже при $n>2$ практично зводить нанівець згадану основну перевагу класичного методу. Як відомо, саме ця обставина зумовила широке розповсюдження операторного методу Гевісайда [13], в якому задача визначення сталих інтегрування розв'язується значно швидше, ніж у класичному методі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язування цієї задачі Коші класичним методом передбачає послідовне виконання таких операцій [1–3; 9–12; 16; 19; 20]:

- систему диференціальних рівнянь першого порядку зводять за допомогою алгебричних перетворень до одного диференціального рівняння n-го порядку з однією невідомою функцією. Вільний член цього рівняння називається зведеним вимушенням;
- невідому функцію представляють сумою двох складових – так званої вимушеної складової, яка є частковим розв'язком повного диференціального рівняння n-го порядку, і так званої вільної складової, яка є розв'язком однорідного диференціального рівняння n-го порядку, отримуваного з повного диференціального рівняння прирівнюванням зведеного вимушення до нуля;
- якщо зведене вимушення є функцією, що належить до класу функцій гармонічних (тобто має вигляд $U_c \cos(wt)+U_s \sin(wt)$), експонент (тобто Ue^{at}) чи многочленів n-го степеня (тобто $U_0+U_1 t+U_2 \frac{t^2}{2!}+...+U_n \frac{t^n}{n!}$), то вимушену складову шукають у цьому ж класі функцій, тобто представляють її «ізоморфною» зі зведеним вимушенням [1], і невідомі параметри цієї функції визначають методом неозначених коефіцієнтів – з лінійної системи алгебричних рівнянь, яку отримують за допомогою підставляння вимушеної складової до повного диференціального рівняння і прирівнювання коефіцієнтів при однойменних функціях часу. Варто підкреслити, що коли зведене вимушення не належить до жодного з названих класів функцій, то застосування класичного методу вимагає додаткового опрацювання;
- вільна складова є сумою експонент, коефіцієнти яких називаються сталими інтегрування, а показники є добутками виду $p_1 t, ..., p_n t$, де $p_1, ..., p_n$ – корені характеристичного рівняння n-го степеня, породжуваного однорідним диференціальним рівнянням;
- сталі інтегрування визначають із лінійної системи алгебричних рівнянь, яку формують за допомогою послідовних перетворень диференціальних рівнянь першого порядку (у тому числі їх послідовного диференціювання $n-1$ разів) і підставляння до перетворених рівнянь суми вільної і вимушеної складових для моменту часу, що відповідає початкові перехідного процесу, з урахуванням відомих початкових умов.

Постановка завдання. Аналіз проблеми показав, що якщо до опису перехідних процесів у лінійних електричних колах застосовувати не диференційні рівняння, а інтегральні, то математичне формулювання задачі є з концепційного погляду простішим.

Виклад основного матеріалу. Проілюструємо цю тезу на прикладі кола, що складається з послідовно сполучених конденсатора з ємністю C, резистора з опором R і котушки з індуктивністю L, живленого напругою

$$u = U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!},$$

де U_0, ... ,U_4 – відомі числа.

У традиційному підході задача розрахунку перехідних процесів у цьому колі формулюється як задача Коші, тобто як система алгебро-диференціальних рівнянь

$$u_L + u_R + u_C = U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!};$$

$$u_R = Ri; \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}; \quad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

де $i = i(t)$; $u_R = u_R(t)$; $u_L = u_L(t)$; $u_C = u_C(t)$ – струм у колі й напруги на резисторі, котушці і конденсаторі як невідомі функції часу; u_{C0} – початкове значення напруги на конденсаторі; i_0 – початкове значення струму в котушці, разом із початковими умовами:

$$\text{“якщо } t = 0, \text{ то } u_C(0) = u_{C0}; \; i(0) = i_0\text{”}, \tag{1}$$

або ж як система диференціальних рівнянь

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!};$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - i = 0$$

разом з початковими умовами (1).

У термінах інтегральних рівнянь задача розрахунку перехідних процесів у цьому ж колі формулюється як система алгебро-інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered} u_L + u_R + u_C = \\ U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!}; \\ u_R = Ri; \quad i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L \mathrm{d}t + i_0; \\ u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t + u_{C0}, \end{gathered} \tag{2}$$

або ж як система інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered} C^{-1}\int_0^t i\mathrm{d}t + Ri + u_L = \\ = -u_{C0} + U_0 + U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!}; \\ L^{-1}\int_0^t u_L \mathrm{d}t - i = i_0. \end{gathered} \tag{3}$$

З порівняння цих двох підходів бачимо, що при формулюванні задачі в термінах інтегральних рівнянь початкові умови виявляються врахованими в самих рівняннях і, отже, тут потреба в понятті задачі Коші як «системи диференціальних рівнянь разом з початковими умовами» відпадає, оскільки система інтегральних рівнянь містить вичерпну інформацію про шуканий перехідний процес.

Безпосереднім і важливим з практичного погляду наслідком наведеної тези є можливість опрацювання загального і водночас простого алгоритму розрахунку перехідних процесів у лінійних колах на підставі класичного методу.

У загальному випадку перехідні процеси в лінійному стаціонарному електричному колі описуються лінійною системою n інтегральних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами і n змінними стану кола як невідомими функціями часу $x_1 = x_1(t)$; ... ; $x_n = x_n(t)$, яка при поліноміальному вимушенні має вигляд

$$\begin{gathered} a_{11}\int_0^t x_1 \mathrm{d}t + \ldots + a_{1n}\int_0^t x_n \mathrm{d}t + \\ + b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = \\ = V_{1,0} + V_{1,1}t + V_{1,2}\frac{t^2}{2!} + \\ + \ldots + V_{1,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + V_{1,m}\frac{t^m}{m!}; \\ \vdots \\ a_{n1}\int_0^t x_1 \mathrm{d}t + \ldots + a_{nn}\int_0^t x_n \mathrm{d}t + \\ + b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n = \\ = V_{n,0} + V_{n,1}t + V_{n,2}\frac{t^2}{2!} + \ldots + \\ + V_{n,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + V_{n,m}\frac{t^m}{m!}, \end{gathered} \tag{4}$$

де a_{jk}, b_{jk} $(j,k = 1, \ldots, n)$ – сталі коефіцієнти, що визначаються параметрами кола; $V_{j,k}$ $(j = 1, \ldots,$ $k = 1, \ldots, m)$ – сталі, що конкретизують поліноміальне вимушення.

Введемо для скорочення запису оператор

$$r = \int_0^t \mathrm{d}t \tag{5}$$

і назвемо його інтегральним оператором першого порядку. Добуток цього оператора на функцію перетворює цю функцію на її інтеграл у межах від 0 до *t*.

Запишемо систему рівнянь (4) з урахуванням (5) у вигляді

$$a_{11}rx_1 + \ldots + a_{1n}rx_n + b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n =$$

$$= V_{1,0} + V_{1,1}t + V_{1,2}\frac{t^2}{2!} + \ldots +$$

$$+V_{1,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+V_{1,m}\frac{t^m}{m!};$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}rx_1+\ldots+a_{nn}rx_n+b_{n1}x_1+\ldots+b_{nn}x_n= \tag{6}$$
$$=V_{n,0}+V_{n,1}t+V_{n,2}\frac{t^2}{2!}+\ldots+$$
$$+V_{n,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+V_{n,m}\frac{t^m}{m!}.$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$x_1=\underline{A}_{11}e^{p_1t}+\ldots+\underline{A}_{1n}e^{p_nt}+X_{10}+$$
$$+X_{11}t+X_{12}\frac{t^2}{2!}+\ldots+X_{1,m-2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+$$
$$+X_{1,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!};$$
$$\vdots \tag{7}$$
$$x_n=\underline{A}_{n1}e^{p_1t}+\ldots+\underline{A}_{nn}e^{p_nt}+X_{n0}+$$
$$+X_{n1}t+X_{n2}\frac{t^2}{2!}+\ldots+X_{n,m-2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+$$
$$+X_{n,m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

де $\underline{A}_{jk}$ $(j,k=1,\ ...,\ n)$ – сталі інтегрування, які в загальному випадку є комплексними величинами; $X_{j,k}$ $(j=1,\ ...,\ n;\ k=1,\ ...,\ m-1)$ – параметри відповіді на поліноміальне вимушення.

Ввівши вектори-стовпчики

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix};\ \vec{V}_0=\begin{bmatrix}V_{1,0}\\ \vdots\\ V_{n,0}\end{bmatrix};$$
$$\vec{V}_1=\begin{bmatrix}V_{1,1}\\ \vdots\\ V_{n,1}\end{bmatrix};\ \ldots\ ;\ \vec{V}_m=\begin{bmatrix}V_{1,m}\\ \vdots\\ V_{n,m}\end{bmatrix};$$
$$\vec{X}_0=\begin{bmatrix}X_{1,0}\\ \vdots\\ X_{n,0}\end{bmatrix};\ \vec{X}_1=\begin{bmatrix}X_{1,1}\\ \vdots\\ X_{n,1}\end{bmatrix};\ \ldots\ ; \tag{8}$$
$$\vec{X}_{m-1}=\begin{bmatrix}X_{1,m-1}\\ \vdots\\ X_{n,m-1}\end{bmatrix};$$
$$\vec{\underline{A}}_1=\begin{bmatrix}\underline{A}_{1,1}\\ \vdots\\ \underline{A}_{n,1}\end{bmatrix};\ \ldots\ ;\ \vec{\underline{A}}_n=\begin{bmatrix}\underline{A}_{n1}\\ \vdots\\ \underline{A}_{nn}\end{bmatrix}$$

і матриці

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix};\ \hat{b}=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

запишемо систему n скалярних інтегральних рівнянь (6) як одне векторне інтегральне рівняння

$$\hat{a}r\vec{x}+\hat{b}\vec{x}=\vec{V}_0+\vec{V}_1t+\vec{V}_2\frac{t^2}{2!}+$$
$$+\ldots+\vec{V}_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+\vec{V}_m\frac{t^m}{m!}, \tag{10}$$

а його розв'язок (7) – у вигляді

$$\vec{x}=\vec{\underline{A}}_1e^{p_1t}+\ldots+\vec{\underline{A}}_ne^{p_nt}+\vec{X}_0+\vec{X}_1t+$$
$$+\vec{X}_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+ \tag{11}$$
$$+\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Проінтегрувавши рівняння (10) $n-1$ разів, отримуємо інтегральне рівняння

$$\hat{a}r^n\vec{x}+\hat{b}r^{n-1}\vec{x}=\vec{V}_0\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\vec{V}_1\frac{t^n}{n!}+$$
$$+\vec{V}_2\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots+\vec{V}_{m-1}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}+ \tag{12}$$
$$+\vec{V}_m\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}.$$

Але згідно з (11)

$$r\vec{x}=\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1}e^{p_1t}-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1}+\ldots+\frac{\vec{\underline{A}}_n}{p_n}e^{p_nt}-$$
$$-\frac{\vec{\underline{A}}_n}{p_n}+\vec{X}_0t+\vec{X}_1\frac{t^2}{2!}+\vec{X}_2\frac{t^3}{3!}+$$
$$+\ldots+\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+\vec{X}_{m-1}\frac{t^m}{m!};$$
$$r^2\vec{x}=\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1^2}e^{p_1t}-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1^2}-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1}t+\ldots+$$
$$+\frac{\vec{\underline{A}}_n}{p_n^2}e^{p_nt}-\frac{\vec{\underline{A}}_n}{p_n^2}-\frac{\vec{\underline{A}}_n}{p_n}t+$$
$$+\vec{X}_0\frac{t^2}{2!}+\vec{X}_1\frac{t^3}{3!}+\vec{X}_2\frac{t^4}{4!}+$$
$$+\ldots+\vec{X}_{m-2}\frac{t^m}{m!}+\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!};$$
$$\vdots$$
$$r^{n-1}\vec{x}=\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1^{n-1}}e^{p_1t}-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1^{n-1}}-$$
$$-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1^{n-2}}t-\ldots-\frac{\vec{\underline{A}}_1}{p_1}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\dots+\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}e^{p_n t}-\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}-\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-2}}t-\\
&-\dots-\frac{\vec{A}_n}{p_n}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\vec{X}_0\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\\
&+\vec{X}_1\frac{t^n}{n!}+\vec{X}_2\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\dots+\\
&+\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m+n-3}}{(m+n-3)!}+\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!};\\
&r^n\vec{x}=\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}e^{p_1 t}-\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}-\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}t-\\
&-\dots-\frac{\vec{A}_1}{p_1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}e^{p_n t}-\\
&-\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}-\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}t-\dots-\frac{\vec{A}_n}{p_n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\\
&+\vec{X}_0\frac{t^n}{n!}+\vec{X}_1\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\vec{X}_2\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}+\\
&+\dots+\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}+\\
&+\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Підставивши (11), (13) до (12), отримуємо алгебричне векторне рівняння

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}e^{p_1 t}-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}t-\\
&-\dots-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}e^{p_n t}-\\
&-\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}-\frac{\vec{A}_n}{\hat{a}p_n^{n-1}}t-\dots-\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\\
&+\hat{a}\vec{X}_0\frac{t^n}{n!}+\hat{a}\vec{X}_1\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\hat{a}\vec{X}_2\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}+\\
&+\dots+\hat{a}\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}+\\
&+\hat{a}\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}+\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}e^{p_1 t}-\\
&-\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}-\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-2}}t-\dots-\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\\
&+\dots+\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}e^{p_n t}-\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}-\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-2}}t-\\
&-\dots-\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\hat{b}\vec{X}_0\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\\
&+\hat{b}\vec{X}_1\frac{t^n}{n!}+\hat{b}\vec{X}_2\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\dots+\\
&+\hat{b}\vec{X}_{m-2}\frac{t^{m+n-3}}{(m+n-3)!}+\hat{b}\vec{X}_{m-1}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}=\\
&=\vec{V}_0\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\vec{V}_1\frac{t^n}{n!}+\vec{V}_2\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\dots+\\
&+\vec{V}_{m-1}\frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}+\vec{V}_m\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

До обчислення невідомих показників $p_1, \dots, p_n$ експонент $e^{p_1 t}, \dots, e^{p_n t}$ та векторів $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n, \vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m$ застосуємо метод неозначених коефіцієнтів. Рівняння (14) задовольняється при кожному значенні змінної t, якщо коефіцієнти при функціях $e^{p_1 t}, \dots, e^{p_n t}$, 1, t, $\dots$, $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $\frac{t^n}{n!}$, $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}$, $\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}$ задовольняють відповідні алгебричні рівняння. Запишемо ці рівняння у вигляді трьох систем:

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}+\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}=0;\ \dots\ ;\\
&\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}+\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}=0;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^n}-\dots-\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n^n}-\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}-\dots-\\
&-\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}=0;\\
&-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-1}}-\dots-\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-1}}-\hat{b}\frac{\vec{A}_1}{p_1^{n-2}}-\dots-\\
&-\hat{b}\frac{\vec{A}_n}{p_n^{n-2}}=0;\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\hat{a}\frac{\vec{A}_1}{p_1}-\dots-\hat{a}\frac{\vec{A}_n}{p_n}+\hat{b}\vec{X}_0=\vec{V}_0;\\
&\hat{a}\vec{X}_0+\hat{b}\vec{X}_1=\vec{V}_1;\\
&\hat{a}\vec{X}_1+\hat{b}\vec{X}_2=\vec{V}_2;\\
&\vdots\\
&\hat{a}\vec{X}_{m-2}+\hat{b}\vec{X}_{m-1}=\vec{V}_{m-1};\\
&\hat{a}\vec{X}_{m-1}=\vec{V}_m.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Рівняння (15) зводяться до n однакових однорідних рівнянь

$$\hat{a}+\hat{b}p_1=0;\ \dots\ ;\ \hat{a}+\hat{b}p_n=0. \tag{18}$$

Воно задовольняється, якщо

$$\det(\hat{a}+\hat{b}p)=0. \tag{19}$$

Ми отримали характеристичне рівняння для системи інтегральних рівнянь (6). Розв'язуючи його чисельним способом, знаходимо показники експонент $e^{p_1 t}$, ... , $e^{p_n t}$.

Рівняння (16), (17) запишемо в матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{a}}{p_1^n}+\frac{\hat{b}}{p_1^{n-1}} & \frac{\hat{a}}{p_2^n}+\frac{\hat{b}}{p_2^{n-1}} & \cdots & \frac{\hat{a}}{p_n^n}+\frac{\hat{b}}{p_n^{n-1}} \\ \frac{\hat{a}}{p_1^{n-1}}+\frac{\hat{b}}{p_1^{n-2}} & \frac{\hat{a}}{p_2^{n-1}}+\frac{\hat{b}}{p_2^{n-2}} & \cdots & \frac{\hat{a}}{p_n^{n-1}}+\frac{\hat{b}}{p_n^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\hat{a}}{p_1} & \frac{\hat{a}}{p_2} & \cdots & \frac{\hat{a}}{p_n} \end{bmatrix} . \tag{20}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \vec{\underline{A}}_1 \\ \vec{\underline{A}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\underline{A}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vec{V}_0 - \hat{b}\vec{X}_0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a} & \hat{b} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{X}_1 \\ \vdots \\ \vec{X}_{m-2} \\ \vec{X}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vdots \\ \vec{V}_{m-1} \\ \vec{V}_m \end{bmatrix}. \tag{21}$$

З (19), (20), (21) бачимо, що системи алгебричних рівнянь для визначення невідомих параметрів шуканого розв'язку задачі мають загальну і дуже просту структуру, що, своєю чергою, дозволяє формувати їх безпосередньо за відомою системою інтегральних рівнянь.

Проілюструємо застосування викладеного методу на прикладі розрахунку перехідного процесу в колі, згаданому на початку статті.

Запишемо систему інтегральних рівнянь (3)

$$C^{-1} r i + Ri + u_L = -u_{C0} + U_0 +$$
$$+U_1 t + U_2 \frac{t^2}{2!} + U_3 \frac{t^3}{3!} + U_4 \frac{t^4}{4!};$$
$$L^{-1} r u_L - i = i_0$$

у вигляді одного векторного інтегрального рівняння

$$\hat{a} r \vec{x} + \hat{b}\vec{x} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 t + \vec{V}_2 \frac{t^2}{2!} + \vec{V}_3 \frac{t^3}{3!} + \vec{V}_4 \frac{t^4}{4!}, \tag{22}$$

або ж

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} i \\ u_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_L \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -u_{C0} + U_0 \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} U_2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \tag{23}$$
$$+ \begin{bmatrix} U_3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \begin{bmatrix} U_4 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t^4}{4!},$$

де

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix}; \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} i \\ u_L \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_0 = \begin{bmatrix} -u_{C0} + U_0 \\ i_0 \end{bmatrix};$$
$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} U_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{24}$$
$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} U_3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} U_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком системи інтегральних рівнянь (3) є сукупність функцій

$$i = \underline{A}_{11} e^{p_1 t} + \underline{A}_{12} e^{p_2 t} + I_0 + I_1 t + I_2 \frac{t^2}{2!} + I_3 \frac{t^3}{3!};$$
$$u_L = \underline{A}_{21} e^{p_1 t} + \underline{A}_{22} e^{p_2 t} + U_{L0} + U_{L1} t + \tag{25}$$
$$+U_{L2} \frac{t^2}{2!} + U_{L3} \frac{t^3}{3!}.$$

Позначивши

$$\vec{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{21} \end{bmatrix}; \; \vec{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{22} \end{bmatrix}; \; \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ U_{L0} \end{bmatrix};$$
$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ U_{L1} \end{bmatrix}; \; \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} I_2 \\ U_{L2} \end{bmatrix}; \; \vec{X}_3 = \begin{bmatrix} I_3 \\ U_{L3} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

запишемо розв'язок (25) у вигляді

$$\begin{bmatrix} i \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{21} \end{bmatrix} e^{p_1 t} + \begin{bmatrix} \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{22} \end{bmatrix} e^{p_2 t} +$$
$$+ \begin{bmatrix} I_0 \\ U_{L0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ U_{L1} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} I_2 \\ U_{L2} \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} I_3 \\ U_{L3} \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!}. \tag{27}$$

Характеристичне рівняння для системи інтегральних рівнянь (3) має вигляд

$$\det \begin{bmatrix} C^{-1}R + p & p \\ -p & L^{-1} \end{bmatrix} = 0,$$

або ж

$$p^2 + pL^{-1}R + L^{-1}C^{-1} = 0, \tag{28}$$

звідки

$$p_1 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}};$$
$$p_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}. \tag{29}$$

Лінійна система алгебричних рівнянь (21) має вигляд

$$\begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a} & \hat{b} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a} & \hat{b} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \vec{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix},$$

або ж

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 & R & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} & 0 & R & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{-1} & 0 & R & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ U_{L0} \\ I_1 \\ U_{L1} \\ I_2 \\ U_{L2} \\ I_3 \\ U_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_3 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Лінійна система алгебричних рівнянь (20) має вигляд

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{a}}{p_1^2} + \dfrac{\hat{b}}{p_1} & \dfrac{\hat{a}}{p_2^2} + \dfrac{\hat{b}}{p_2} \\ \dfrac{\hat{a}}{p_1} & \dfrac{\hat{a}}{p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\underline{A}}_1 \\ \vec{\underline{A}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{V}_0 - \hat{b}\vec{X}_0 \end{bmatrix},$$

або ж

$$\begin{bmatrix} \dfrac{C^{-1}}{p_1^2} + \dfrac{R}{p_1} & \dfrac{1}{p_1} & \dfrac{C^{-1}}{p_2^2} + \dfrac{R}{p_2} & \dfrac{1}{p_2} \\ -\dfrac{1}{p_1} & \dfrac{L^{-1}}{p_1^2} & -\dfrac{1}{p_2} & \dfrac{L^{-1}}{p_2^2} \\ \dfrac{C^{-1}}{p_1} & 0 & \dfrac{C^{-1}}{p_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{L^{-1}}{p_1} & 0 & \dfrac{L^{-1}}{p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{21} \\ \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \quad (31)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_{C0} + U_0 - RI_0 - U_{L0} \\ i_0 + I_0 \end{bmatrix}.$$

Обчисливши показники (29) й розв’язавши числовим способом лінійні системи алгебричних рівнянь (30), (31), записуємо розв’язок (25).

Опрацьований метод можна застосовувати, якщо вимушення є аналітичними функціями, що не належать до класу функцій гармонічних або показникових, наприклад, якщо вони є функціями виду $\exp(a_0 + a_1 t + a_2 \dfrac{t^2}{2!} + ... + a_n \dfrac{t^n}{n!})$, функціями Бесселя тощо. Наблизивши ці вимушення на інтервалі $0 < t < t_m$ многочленами Тейлора, обчислюємо для цього інтервалу параметри розв’язку задачі безпосередньо з рівнянь виду (20), (21).

Висновки. Опрацьований варіант класичного методу розрахунку перехідних процесів у лінійних стаціонарних електричних колах при поліноміальних вимушеннях дозволяє на підставі системи інтегральних рівнянь, яка описує процес у колі, безпосередньо записати лінійну систему алгебричних рівнянь з невідомими коефіцієнтами всіх функцій, що входять до розв’язку задачі, і розв’язати ці рівняння чисельно. Він є з математичного погляду простим, а його практична реалізація є менш трудомісткою порівняно з операторним методом.

Бібліографічний список

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Москва: Высш. шк., 1965. 658 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи. Москва: Гардарики, 2002. 536 с.
3. Блажкевич Б. І. Основи теорії лінійних електричних кіл. Київ: Вища шк., 1964. 584 с.
4. Герман А. Математичне моделювання асинхронного генератора з внутрішньою ємнісною компенсацією. *Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження*. Львів, 2017. № 21. С. 184–189.
5. Гречин Д. П. Дослідження електромагнітних полів у провідній феромагнітній трубі. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи*. Львів, 2003. № 487. С. 140–145.
6. Гречин Д. П. Моделювання нестаціонарного електромагнітного поля у нескінченній двошаровій провідній феромагнітній трубі. *Вісник НУ “Львівська політехніка”. Електроенергетичні та електромеханічні системи*. Львів, 2009. № 654. С. 71–73.
7. Гречин Д. П., Герман А. Ф., Дробот І. М. Континуальна математична модель електромагнітного поля асинхронної машини із зубчатим феромагнітним ротором. *Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження*. 2016. № 20. С. 34–41.
8. Гречин Д. П., Дробот І. М., Герман А. Ф., Дубік В. М. Вплив розмірів паза ротора на величину пускового моменту короткозамкненого асинхронного двигуна. *Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету. Технічні науки*. Кам’янець-Подільський, 2016. № 24, ч. 2. С. 47–54.
9. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники. Москва: Высш. шк., 1981. 488 с.
10. Перхач В. С. Теоретична електротехніка: лінійні кола. Київ: Вища шк., 1992. 439 с.
11. Уайд Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. Ленинград: Энергия, 1964. 539 с.

12. Фільц Р. Рівноважникове числення: монографія. Львів: Львів. держ. ін-т новітніх технологій та управління ім. В. Чорновола, 2010. 184 с.

13. Фільц Р. В., Лябук М. Н. Операторний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах: навч. посіб. Луцьк, 2008. 200 с.

14. Чабан А. В. Принцип Гамільтона-Остроградського в електромеханічних системах. Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2015. 488 с.

15. Чабан А. В., Левонюк В. Р., Дробот І. М., Герман А. Ф. Математичне моделювання перехідних процесів у лінії Лехера в стані неробочого ходу. *Електротехніка і електромеханіка*. 2016. № 3. С. 30–35.

16. Шимони К. Теоретическая электротехника. Москва: Мир, 1964. 785 с.

17. Hrechyn D. Modeling of non-stationary electromagnetic field in infinite two-layer conducting ferromagnetic plate. *Proceedings of the XIII International symposium on theoretical electrical*. Lviv, 2005. P. 36–38.

18. Hrechyn D. P., Herman A. F., Drobot I. M. Continuum mathematical model of the electromagnetic field of a linear asynchronous machine. *Motrol. Motoryzacia i energetyka rolnictwa*. Lublin, 2016. No. 17. P. 31–35.

19. Mayr O. Beitriige zur Theorie des statischen und des dynamischen Lichtbogens. *Archiv fur Elektrotechnik*. Heft, 1943. No. 37. P. 588–608.

20. Filc R., Stefaniak Z., Hreczyn D. Modelowanie matematyczne niestacjonarnego pola elektromagnetycznego w płycie ferromagnetycznej. *Prace XXIII Międzynarodowej konferencji z podstaw elektrotechniki i teorii obwodyw IC*. Gliwice, 2000. P. 67–72.

Гречин Д., Дробот І., Герман А.

РОЗРАХУНОК КЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ ВИМУШЕННЯМИ

Переважна більшість об'єктів є нестаціонарними, вони змінюються у часі під впливом внутрішніх та зовнішніх чинників. Для формального опису нестаціонарних процесів був розроблений спеціальний математичний апарат, який отримав назву диференціальних рівнянь. У різних методах розрахунку перехідних процесів у лінійних колах враховується різна кількість членів розкладання (у багатокрокових методах в поєднанні з інтерполяційними формулами), що визначає точність обчислень. Під час використання цих методів на ЕОМ слід розрізняти похибки округлення через обмеженість кількості значущих цифр в ЕОМ та похибку зрізання (обмеження) – методичну похибку, що пов'язана з апроксимацією розв'язків скінченними рядами, замість нескінченних, наприклад, рядами Тейлора. Методи розв'язання задачі Коші поділяють на однокрокові та багатокрокові. В однокрокових методах для знаходження наступної точки на кривій потрібна інформація лише про один попередній крок (методи Ейлера і Рунге – Кутта). У багатокрокових методах для знаходження наступної точки на кривій потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок. З математичного погляду класичний метод розрахунку перехідних процесів у лінійних колах є найпростішим серед відомих методів розв'язування задачі Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Аналіз проблеми показав, що якщо до опису перехідних процесів у лінійних електричних колах використовувати не диференціальні рівняння, а інтегральні, то математичне формулювання задачі є з концепційного погляду простішим.

У статті розглянуто варіант класичного методу розрахунку перехідних процесів у лінійних стаціонарних електричних колах, який дозволяє записувати системи алгебричних рівнянь з невідомими параметрами розв'язку задачі безпосередньо на підставі системи інтегральних рівнянь процесу в колі.

Ключові слова: класичний метод, перехідні процеси, гармонічна функція, алгоритм розрахунку, задача Коші.

Hrechyn D., Drobot I., Herman A.

THE CLASSICAL METHOD OF LINEAR CIRCUITS TRANSIENTS WITH POLYNOMIAL INPUTS

The vast majority of objects are non-stationary, they vary in time under the influence of internal and external factors. For a formal description of nonstationary processes, a special mathematical apparatus, called differential equations, was developed. Different methods for calculating transient processes in linear circuits take into account the different number of expansion members (in multi-step methods in conjunction with interpolation formulas), which determines the accuracy of computations. When using these methods on a computer it is necessary to distinguish the rounding errors due to the limited number of significant digits in the computer; cut-off error (limitation) is a methodological error associated with the approximation of solutions to finite rows, instead of infinite, for example, Taylor series. Methods of solving the Cauchy problem are divided into one-to-one and multi-step. In one-step

methods, finding the next point on the curve requires information about only one previous step (Euler's and Runge-Kutta's methods). In multi-step methods, finding the next point on the curve requires information from more than one of the previous points. From a mathematical point of view, the classical method for calculating transition processes in linear circles is the easiest among known methods for solving the Cauchy problem for a linear system of differential equations with constant coefficients. Analysis of the problem has shown that if, before the description of transient processes in linear electric circles, it is not the differential equations that are integral, then the mathematical formulation of the problem is simpler from the conceptual point of view.

In the article the variant of the classical method for calculating transient processes in linear stationary electric circles is considered, which allows to write down the systems of algebraic equations with unknown parameters of the solution of the problem directly on the basis of the system of integral equations of the process in a circle.

Key words: classical method, transient processes, harmonic function, calculation algorithm, Cauchy problem.

Стаття надійшла 18.11.2018