

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНІ З ДВОМА РІВНИМИ КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ПРИ РОЗТЯГУ

Олександр Пономаренко, к. ф.-м. н., Віктор Семерак, к. т. н., Орест Гавриляк

*Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: alexanderponomarenko54@gmail.com
e-mail: semerakvictor@gmail.com
e-mail: orestgavrilak@gmail.com*

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2022.26.149>

Пономаренко О., Семерак В., Гавриляк О. Концентрація напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу

У сучасній промисловості і будівництві при проектуванні споруд і машин в авіабудуванні, кораблебудуванні, машинобудуванні широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

Тому вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів є важливим завданням як з теоретичного, так і з інженерного погляду. У праці отримано розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під довільним кутом до лінії центрів отворів. Визначено коефіцієнти концентрації напружень по контурах отворів залежно від напрямку розтягу та відстані між центрами отворів. Задача розв'язується виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленій отворами пластині, і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв'язку з наявністю отворів. Задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурах отворів та на нескінченності. Наукова новизна полягає в тому, що розв'язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактору, як орієнтування отворів відносно поля навантажень у вигляді розтягу під довільним кутом до лінії центрів отворів. Розв'язок задачі наводиться в біполярних координатах. Отримано формули для напружень по контурах отворів. Побудовано епюри напружень і проведено аналіз зміни коефіцієнта концентрації напружень залежно від напрямку розтягу та відстані між центрами отворів. Результати, отримані в роботі, дають змогу провести теоретичне визначення коефіцієнта концентрації напружень біля отворів і можуть бути використані в інженерній практиці під час проєктування деталей у кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні.

Ключові слова: концентрація напружень біля отворів, біполярні координати.

Ponomarenko O., Semerak V., Havryliak O. Concentration of stresses in plate with two equal circular holes by tension

In modern industry and building by project construction and machines in aircraft industry, shipbuilding, machine-building loose application find elastic details in the form of thin plates, which from different considerations loosen different kind holes. By loading such details near the holes, concentration of strains arises causing unfavourable effect on the durability of detail. Strains on the contours of holes are distributed uneven: there is small sections, which are subjected to the impact of high strains. These are the sections, where fragile cracks or plastic deformations appear, development which may result in destruction of construction.

Therefore, the study of distribution of strains near curve holes is important both from theoretical and engineering point of view.

The purpose of the present work is to provide solution of problem of the theory of elastic about concentration of stresses in plate with two equal circular holes by tension under arbitrary corner to line of hole centres.

The task of work is to define the coefficient of concentration of stresses on the contours of holes in dependence on the direction of tension and distance between the hole centres. The problem decision is in compliance with the principal function of stresses, that correspond to the strained state in unloosen hole plate. This function of stresses is added with another bi-harmonic function, which corresponds to the additional strained state, which arise because of holes.

The problem needs finding the bi-harmonic function of stresses, which satisfy the threshold conditions on the contours of holes and on infinity. Scientific novelty consists in solution of the present problem providing information about the influence on concentration made by the factor, like orientation of holes as regards to field loading in the form of tension under arbitrary corner to line of the hole centres.

Solution of the problem is presented in bipolar coordinates. The obtained formulas for stresses on contours of holes are presented. The authors have built a diagram of stresses and conducted analysis of the change of the coefficient stress concentration in dependence on the tension and distance between the hole centres.

The obtained results of the conducted theoretical coefficient of stress concentration near the holes can be used in engineering practice by construction of details in shipbuilding, airbuilding, transport and agrarian machine-building.

Result presented in the paper allow conducting theoretical substantiation of the coefficient of strain concentration near the holes and may be used in engineering practice in the time of work out details in aircraft industry, shipbuilding, machinebuilding.

Key words: concentration of stresses near holes, bipolar coordinates.

Постановка проблеми. Із набуттям незалежності України одним із важливих завдань, що ставиться перед машинобудуванням, є раціональне та економне використання металу, підвищення технічного рівня та якості продукції машинобудування, її надійності та довговічності. Створення нових конструкцій машинобудування з легшою вагою при покращанні їх якості можливе лише в разі врахування дійсних умов роботи цих конструкцій в області пружних деформацій.

У сучасній промисловості і будівництві при проектуванні споруд і машин в авіа-, корабле-, машинобудуванні широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

Тому вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів є важливим завданням як з теоретичного, так і з інженерного погляду.

Наше дослідження присвячене вивченню концентрації напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під довільним кутом φ до лінії центрів отворів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Надзвичайно різноманітні сучасні проблеми концентрації напружень розглянуто в працях Міжнародної наукової конференції, присвяченої 75-річчю академіка НАН України О. С. Космодам'янського [16]. У праці [1] описано застосування методів теорії пружності для дослідження та розрахунків металургійного обладнання. У працях [2; 5–9] наведено наближений метод визначення напруженого стану багатозв'язної ізотропної півплощини з отворами і тріщинами, розглянуто розв'язок циклічної задачі для пластини з отворами і тріщинами і її застосування

в гірничій справі.

У монографії [4] викладено сучасні ефективні методи визначення напруженого стану багатозв'язних однорідних і кусково-однорідних ізотропних пластинок з отворами, тріщинами і включеннями, наведено розв'язки різних класів задач, описано результати числових досліджень з їх аналізом і встановленням закономірностей впливу на значення напружень та їх концентрацію геометричних характеристик отворів, тріщин і включень, їх кількості і розміщення, фізико-механічних характеристик досліджуваних середовищ.

У праці [12] досліджується динамічна концентрація напружень на краю колового отвору за дії на нього неосесиметричного навантаження.

Надзвичайно широкий спектр задач розглянуто учасниками Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» у 2018 р., присвяченої 90-річчю від дня народження світлої пам'яті академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики у Львові [18]. У праці [10] досліджено напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності.

Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною проведено у праці [13]. Питання регуляризації формули обернення перетворення Лапласа стосовно визначення концентрації динамічних напружень у пластинках з отворами розглянуто у праці [17]. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин проаналізовано в праці [15].

Постановка завдання. Метою дослідження є отримання розв'язку задачі теорії пружності про концентрацію напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під довільним кутом до лінії центрів отворів.

Завданням дослідження є визначення коефіцієнтів концентрації напружень по контурах отворів залежно від напрямку розтягу та відстані

між центрами отворів.

Задача розв'язується виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленій отворами пластині, і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв'язку з наявністю отворів. Задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурах отворів та на нескінченності.

Наукова новизна полягає в тому, що розв'язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактору, як орієнтування отворів відносно поля навантажень у вигляді розтягу під довільним кутом до лінії центрів отворів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо тонку необмежену ізотропну пластину, що містить два кругових отвори рівних радіусів. Пластина перебуває в умовах розтягу зусиллями p в напрямі, що складає кут φ з віссю Ox , що є лінією центрів отворів (рис. 1).

Визначимо напружений стан у пластині за умови, що по контуру отворів не прикладено жодних зовнішніх зусиль.

При розтягу суцільної пластини зусиллями p за напрямом, що складає кут φ з віссю Ox ,

$$\sigma_x = p \cos^2 \varphi,$$

$$\sigma_y = p \sin^2 \varphi, \quad \tau_{xy} = p \sin \varphi \cos \varphi. \quad (1)$$

При цьому функція напружень має такий вигляд:

$$U_0(x, y) = \frac{p}{2} x \sin \varphi - y \cos \varphi^2. \quad (2)$$

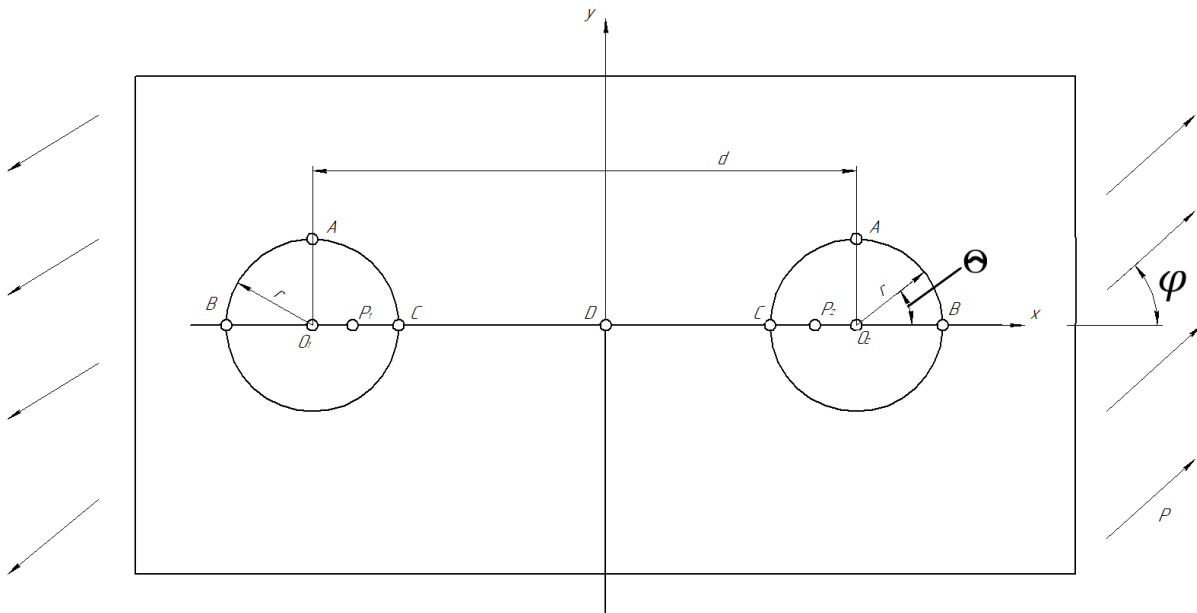


Рис. 1. Схема навантаження пластини

Fig. 1. Schema of plate loading

Подамо цю основну функцію напружень у вигляді:

основний напружений стан пластини характеризується, як відомо [14], компонентами напружень:

$$U_0(x, y) = U_{0.1} + U_{0.2} + U_{0.3}, \quad (3)$$

де

$$U_{0.1} = k_1 x^2, \quad U_{0.2} = k_2 y^2, \quad U_{0.3} = k_3 xy,$$

причому $k_1 = \frac{p}{2} \sin^2 \varphi$, $k_2 = \frac{p}{2} \cos^2 \varphi$, $k_3 = -\frac{p}{2} \sin 2\varphi$.

Використаємо біполярні координати α , β [19], які зв'язані з прямокутними координатами x , y залежностями:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \quad (4)$$

або вводячи величину g , що характеризує масштаб перетворення:

$$g = (a \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta), \quad (5)$$

отримаємо

$$xg = a \operatorname{sh} \alpha, \quad yg = a \sin \beta. \quad (6)$$

Розв'яжемо задачу, виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленій вирізами пластині, і до цієї функції напружень додамо другу бігармонічну функцію, що відповідає додатковому напруженому стану, який виникає у зв'язку з наявністю вирізів.

Тоді повну функцію напружень $U(x,y)$ подамо у вигляді суми:

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^3 U_{0,i}(x,y) + k_i U_{1,i}(x,y), \quad (7)$$

де

$$U_0(x,y) = \sum_{i=1}^3 U_{0,i}(x,y) = k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 xy \quad (8)$$

є основна функція напружень, а $\sum_{i=1}^3 k_i U_{1,i}(x,y)$ – додаткова функція напружень.

Функції $U_{1,i}(x,y)$ повинні бути підібрані так, щоб, знімаючи напруження на контурах отворів,

$$gU_{1,i}(\alpha, \beta) = G_i(ch\alpha - \cos\beta) \ln(ch\alpha - \cos\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,i}(\alpha) \cos n\beta, \quad (i = 1,2) \quad (10)$$

де

$$f_{n,i}(\alpha) = A_{n,i} ch n + 1 \alpha + \beta_{n,i} ch n - 1 \alpha, \quad (11)$$

$$gU_{1,3}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,3} sh n + 1 \alpha + B_{n,3} sh n - 1 \alpha \sin n\beta. \quad (12)$$

Сталі G_i дають змогу так підібрати функції $g U_{1,i}(\alpha, \beta)$, щоб ці останні не змінювали на нескінченності основний напружений стан.

Компоненти напружень $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ у застосованій тут системі координат (4) визначаються за формулами [19]:

$$\begin{aligned} \alpha\sigma_\alpha &= [(ch\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - sh\alpha \frac{\partial^2}{\partial\alpha} - \sin \frac{\partial}{\partial\beta} + ch\alpha] gU, \\ \alpha\sigma_\beta &= [(ch\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - sh\alpha \frac{\partial^2}{\partial\alpha} - \sin \frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta] gU, \\ \alpha\tau_{\alpha\beta} &= -(ch\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} gU. \end{aligned} \quad (13)$$

Визначимо напруження $\sigma_{0\alpha, i}, \tau_{0\alpha\beta, i}$, що виникають відповідно від кожної з функцій $U_{0,i}$, а

$$\alpha\sigma_{1\alpha, i} = -\frac{1}{2} G_i(ch2\alpha - 2ch\alpha \cos\beta + \cos 2\beta) + f_{1,i}(\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n-1 \ n-2 \ f_{n-1, i} - 2n^2 - 1 \ f_{n,i} ch\alpha + n+1 \ n+2 \ f_{n+1} - 2sh\alpha f'_{n,i}] \cos n\beta; \quad (15)$$

$$\alpha\tau_{1\alpha\beta, i} = -\frac{1}{2} f'_{1,i} - G_i sh\alpha - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n-1 \ f'_{n-1, i} - 2nch\alpha f'_{n,i} + n+1 \ f'_{n+1, i}] \sin n\beta; \quad i = 1,2 \quad (16)$$

$$\alpha\sigma_{1\alpha, 3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{n-1 \ n-2 \ f_{n-1, 3} \alpha + n+1 \ n+2 \ f_{n+1, 3} \alpha - 2n^2 - 1 \ ch\alpha f_{n, 3} \alpha - 2f'_{n, 3}(\alpha) sh\alpha\} \sin n\beta. \quad (17)$$

$$\alpha\tau_{1\alpha\beta, 3} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(n-1) f'_{n-1, 3} \alpha - 2n f'_{n, 3} \alpha ch\alpha + (n+1) f'_{n+1, 3}(\alpha)\} \cos n\beta + \frac{1}{2} f'_{1, 3}(\alpha). \quad (18)$$

Із граничних умов (9) після порівняння коефіцієнтів відповідно при $\cos n\beta$ і $\sin n\beta$ отримуємо:

$$2f_{1,2} c = -2\sigma_{0,i} + G_i ch2c, \quad (19)$$

$$n \ n^2 - 1 \ f_{n,i} \ c \ shc = f'_{1,i} \ c \ nch \ nc - cthc \ sh \ nc - G_i \ n - 1 \ shnc - n + 1 \ sh \ n - 2 \ c + \sum_{m=1}^{n-1} m\sigma_{m,i} + \tau_{m,i} cthc \ sh \ n - m \ c - n - m \ \tau_{m,i} ch \ n - m \ c,$$

$$\begin{aligned} n f'_{1,2} \ c \ shc &= f'_{1,2} shnc - 2\sigma_i sh(n-1)c \times \\ &\times shc + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \tau_{m,i} sh \ n - m \ c], \end{aligned} \quad (20)$$

що виникають відповідно від функції $U_{0,i}(x,y)$, дорівнювали нулю на нескінченності.

Отже, задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, що задовольняє граничні умови:

$$\sigma_{\alpha|\alpha=\pm c} = \tau_{\alpha\beta|\alpha=\pm c} = 0. \quad (9)$$

Контури отворів у системі координат (4) збігаються з координатними лініями $\alpha=c, \alpha=-c$.

У біполярних координатах (4) додаткові функції напружень $U_{1,i}(\alpha, \beta)$, враховуючи основний напружений стан і однозначність переміщень, будемо шукати у вигляді:

також напруження $\sigma_{1\alpha, i}, \tau_{1\alpha, i}$, що відповідають функціям $U_{1,i}$.

Після перетворень будемо мати:

$$\sigma_{0 \ \alpha, i} = \sigma_{0, i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n, i} \cos n\beta, \quad (i = 1,2)$$

$$\tau_{0 \ \alpha\beta, i} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{n, i} \sin n\beta,$$

$$\sigma_{0 \ \alpha, 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n, i} \sin n\beta,$$

$$\tau_{0 \ \alpha\beta, 3} = \tau_{0, 3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{n, 3} \cos n\beta,$$

причому

$$\sigma_{0,1} = e^{-\alpha} sh\alpha,$$

$$\tau_{n,1} = \sigma_{n,1} = -2e^{-n\alpha} sh\alpha \ nsh\alpha - ch\alpha,$$

$$\sigma_{0,2} = e^{-\alpha} ch\alpha \quad (14)$$

$$\tau_{0,3} = e^{-2\alpha},$$

$$\tau_{n,2} = \sigma_{n,2} = 2e^{-n\alpha} \ nsh\alpha - ch\alpha \ sh\alpha,$$

$$\tau_{n,3} = -\sigma_{n,3} = 4e^{-n\alpha} \ nsh^2\alpha - sh\alpha \ ch\alpha.$$

Напруження, що виникають від додаткових функцій напружень $U_{1,i}$, запишуться у вигляді:

$$nf'_{n,i} c shc = f'_{1,i} shnc - 2G_i sh n - 1 c \times \times shc + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \tau_{m,i} sh n - m c, \quad (21)$$

$$f'_{1,i} c = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{m,i} e^{-mc} + 2G_i e^{-c} shc, \quad (22)$$

$$f'_{1,3} c = -2\tau_{0,3}, \quad (23)$$

$$n n^2 - 1 f_{n,3} c shc = f'_{1,2} c nchnc - cthc shnc + 2 \sum_{m=1}^{n-1} m - n \tau_{m,3} ch n - m \cdot c - -m \sigma_{m,3} - \tau_{m,3} cthc sh n - m c, \quad (24)$$

$$-nf'_{n,3} c shc = f'_{1,3} c chnc - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \tau_{m,3} sh n - m c. \quad (25)$$

Після перетворень з (19) – (25) отримаємо таку систему рівнянь для визначення всіх невідомих коефіцієнтів шуканої функції напружень:

$$n + 1 A_{n,i} sh n + 1 c + n - 1 B_{n,i} sh n - 1 c = f_{n,i} c, \\ A_{n,i} ch n + 1 c + B_{n,i} ch n - 1 c = g_{n,i} c, \quad i = 1,2 \quad (26)$$

де

$$nf_{n,i} c e^{nc} = 2G_1 shc + n shc - chc, \quad n \geq 1 \quad (27)$$

$$n n^2 - 1 g_{n,1} c e^{nc} = -2G_1 nshc + chc - n n^2 - 1 shc, \quad n \geq 2, \quad (28)$$

$$2g_{1,1} c = G_1 ch2c - 2e^{-c} shc \quad (29)$$

$$nf_{n,2} c e^{nc} = 2G_2 shc - n n shc - chc, \quad n \geq 1 \quad (30)$$

$$n n^2 - 1 g_{n,2} c e^{nc} = -2G_2 n shc + chc + \quad (31)$$

$$+n n^2 - 1 shc, \quad (n \geq 2)$$

$$2g_{1,2} c = G_2 ch2c - 2e^{-2} chc, \quad (32)$$

$$n n^2 - 1 g_{n,2} c e^{nc} = -2G_2 n shc - chc + n n^2 - 1 shc, \quad (33)$$

$$n + 1 A_{n,3} ch n + 1 c + n - 1 B_{n,3} ch n - 1 c = f_{n,3} c, \quad (34)$$

$$A_{n,3} sh n + 1 c + B_{n,3} sh n - 1 c = g_{n,3} c,$$

$$f_{n,3} c e^{nc} = 2 n shc - chc, \quad (35)$$

$$g_{n,3} c e^{nc} = -2shc. \quad (36)$$

Розв'язуючи системи (26) і (34) для величин $A_{n,i}$, $B_{n,i}$, G_i , отримаємо вирази:

$$n n + 1 A_{n,i} \cdot \Delta_1 = 2G_1 e^{-nc} shnc + ne^{-c} shc + n n + 1 e^{-nc} chnc - ne^{-c} shc, \quad (i=1,2) \quad (37)$$

$$n n - 1 B_{n,i} \cdot \Delta_1 = 2G_1 e^{-nc} shnc + ne^c shc + n n - 1 e^{-nc} chnc - ne^c shc, \quad (38)$$

$$B_{1,1} = \frac{1}{2} G_1 thc ch 2c - 2e^{-c} chc - e^{-2c} cth 2c, \quad (39)$$

$$n n + 1 A_{n,2} \cdot \Delta_1 = G_2 1 - e^{-2nc} + n - n e^{-2c} - \frac{n n + 1}{2} (1 + e^{-2nc} - n + ne^{-2c}), \quad (40)$$

$$n n - 1 B_{n,2} \cdot \Delta_1 = 1 - e^{-2nc} + ne^{2c} - n G_2 - \frac{n n - 1}{2} (1 + e^{-2nc} - n + ne^{-2c}), \quad (41)$$

$$B_{1,2} = \frac{1}{2} G_2 thc ch 2c - 2e^{-c} chc + e^{-2c} cth 2c, \quad (42)$$

$$\Delta_1 = sh2nc + nsh2c,$$

$$G_1 \frac{1}{2} + thcsh^2c - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nc} shnc + nshc(nshc + chc)}{n(n^2 - 1)\Delta_1} = 1 - 2sh^2c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\Delta_1}, \quad (43)$$

$$G_2 \frac{1}{2} + thcsh^2c - 4 \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{e^{-nc} shnc + nshc(nshc + chc)}{n(n^2 - 1)\Delta_1} = 2sh^2c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\Delta_1}, \quad (44)$$

$$A_{n,3} \cdot \Delta_2 = n - 1 + e^{-2nc} - ne^{-2c}, \quad (45)$$

$$B_{n,3} \cdot \Delta_2 = n + 1 - e^{-2nc} - ne^{2c}, \quad (46)$$

$$A_{1,3} = -e^{-2c} sech2c, \quad (47)$$

$$B_{1,3} = 0, \quad (48)$$

причому

$$\Delta_2 = sh 2nc - n sh2c. \quad (49)$$

Для напружень σ_β , нормальних до контурів отворів, маємо:

$$\frac{\sigma_\beta}{\rho} |_{a=c} = \sigma_{\beta,1} + \sigma_{\beta,2} + \sigma_{\beta,3}, \quad (50)$$

де

$$\sigma_{\beta,1} = 2 \cos^2 \varphi (chc - \cos \beta) [G_1 shc (1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{shnc \cos n\beta}{\Delta_1}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n sh nc shc - ch nc chc) \cos n\beta}{\Delta_1}], \quad (51)$$

$$\sigma_{\beta,2} = 2 \sin^2 \varphi (chc - \cos \beta) [G_2 shc (1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{shnc \cos n\beta}{\Delta_1}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\Delta_1} (n sh nc shc - ch nc chc) \cos n\beta], \quad (52)$$

$$\frac{\sigma_{\beta,3}}{\sin 2\varphi} = \frac{8 chc \sin \beta (1 - chc \cos \beta)}{(chc - \cos \beta)^2} + 4(chc - \cos \beta) \{ e^{-4c} scch 2c \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{1}{\Delta_2} n^2 shc - n chc e^{-2c} - e^{-2c} + (2n^3 shc - n^2 e^c + n e^{-c}) sh 2c \} * \sin n\beta. \quad (53)$$

Для обчислення напружень σ_{β} на контурі отвору необхідно вивести формулу, що зв'яже центральний кут отвору θ з біполярними координатами α, β .

Із розгляду рис. 2 видно, що таку формулу можна отримати, враховуючи, що центр отвору C міститься на відстані $d = a \operatorname{cth} \alpha$, а абсциса x і радіус r визначаються за формулами $x = a \operatorname{sh} \alpha / (ch \alpha - \cos \beta)$, $r = a / \operatorname{sh} \alpha$.

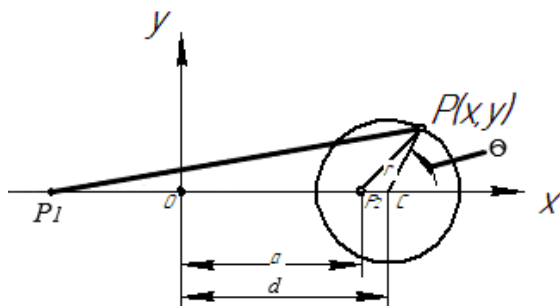


Рис. 2. Ілюстрація зв'язку центрального кута отвору θ з біполярними координатами α, β

Fig. 2. Illustration bond central corner θ with bipolar coordinates α, β

Тоді можна записати:

$$r \cos \theta = x - a \operatorname{cth} \alpha, \quad (54)$$

Підставляючи значення:

$$r = \frac{a}{\operatorname{sh} \alpha}, \quad x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{ch \alpha - \cos \beta},$$

отримаємо

$$\frac{a}{\operatorname{sh} \alpha} \cos \theta = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{ch \alpha - \cos \beta} - a \operatorname{cth} \alpha, \quad (55)$$

або

$$\cos \theta (ch \alpha - \cos \beta) = sh^2 \alpha - ch \alpha (ch \alpha - \cos \beta). \quad (56)$$

Остаточно отримаємо:

$$\cos \theta = \frac{ch \alpha \cos \beta - 1}{ch \alpha - \cos \beta}, \quad (57)$$

або

$$\theta = \arccos \frac{ch \alpha \cos \beta - 1}{ch \alpha - \cos \beta}. \quad (58)$$

Отже, співвідношення (57), (58) дають зв'язок між центральним кутом отвору θ і біполярними координатами α, β .

Позначаючи $ch \alpha = \lambda$, із (57) маємо:

$$\cos \theta = \frac{\lambda \cos \beta - 1}{\lambda - \cos \beta}. \quad (59)$$

Для координати β отримуємо:

$$\cos \beta = \frac{1 + \lambda \cos \theta}{\lambda + \cos \theta}. \quad (60)$$

Остання формула є дуже корисною при обчисленні σ_{β} на контурі кругового отвору.

На основі формули (60) для пластини з одним круговим отвором, тобто при $c \rightarrow \infty$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\beta}}{\rho} |_{a=c} &= \\ &= \cos^2 \varphi (1 - 2 \cos 2\theta) + \\ &+ \sin^2 \varphi (1 + 2 \cos 2\theta) - 4 \sin 2\varphi \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (61)$$

При $\varphi = 0$ визначимо:

$$\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} |_{a=c} = 1 - 2 \cos 2\theta, \quad (62)$$

а при $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\sigma_{\beta}}{\rho} |_{a=c} = 1 + 2 \cos 2\theta. \quad (63)$$

Отже, маємо відомі результати, що отримуються із застосуванням полярних координат [11].

З формули (50) можна отримати відомі формули напружень для площини з двома рівними круговими отворами при розтягу відповідно паралельно і перпендикулярно до лінії центрів [19]. Так, у випадку поздовжнього розтягу, кут $\varphi = 0$. Тоді з (50) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\beta}}{\rho} |_{a=c} &= 2(chc - \cos \beta) [G_1 shc (1 + \\ &+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh nc \cos n\beta}{\Delta_1} - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n sh nc shc - ch nc chc) \cos n\beta}{\Delta_1}], \end{aligned} \quad (64)$$

а у випадку поперечного розтягу $\varphi = \pi/2$ і тоді маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\beta}}{\rho} |_{a=c} &= 2(chc - \cos \beta) [G_2 shc (1 + \\ &+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{shnc \cos n\beta}{\Delta_1}) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_1} n(n sh nc shc - \\ &- ch nc chc) \cos n\beta]. \end{aligned} \quad (65)$$

У таблиці наведено значення коефіцієнта концентрації напружень σ_B/ρ у точках A, B, C (див. рис. 1) для різних значень кута φ і відстаней між центрами отворів.

Таблиця. Значення коефіцієнта концентрації напружень σ_B/ρ у точках A, B, C (див. рис. 1) для різних значень кута φ і відстаней між центрами отворів

Table. Values of the coefficient of stress concentration σ_B/ρ in points A, B, C (fig. 1) for different values of corners φ and distances between centers of holes

$\lambda = d/2r$	точка A $\varphi = 10^\circ$	точка C $\varphi = 90^\circ$	точка B $\varphi = 90^\circ$
1	2,569	∞	3,868
1,5	2,623	3,264	3,151
2	2,703	3,020	3,066
3	2,825	2,992	3,020
5	2,927	2,997	3,004
8	2,970	2,999	3,001
∞	3,000	3,000	3,000

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{r}=2,05$, $\varphi = 10^\circ$ побудовано на рис. 3.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{r}=2,01$, $\varphi = 10^\circ$ побудовано на рис. 4.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{2r}=1,54$, $\varphi = 10^\circ$ побудовано на рис. 5.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{2r}=1,54$, $\varphi = 30^\circ$ побудовано на рис. 6.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{2r}=1,54$, $\varphi = 45^\circ$ побудовано на рис. 7.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{2r}=3$, $\varphi = 45^\circ$ побудовано на рис. 8.

Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $\frac{d}{2r}=5$, $\varphi = 45^\circ$ побудовано на рис. 9.

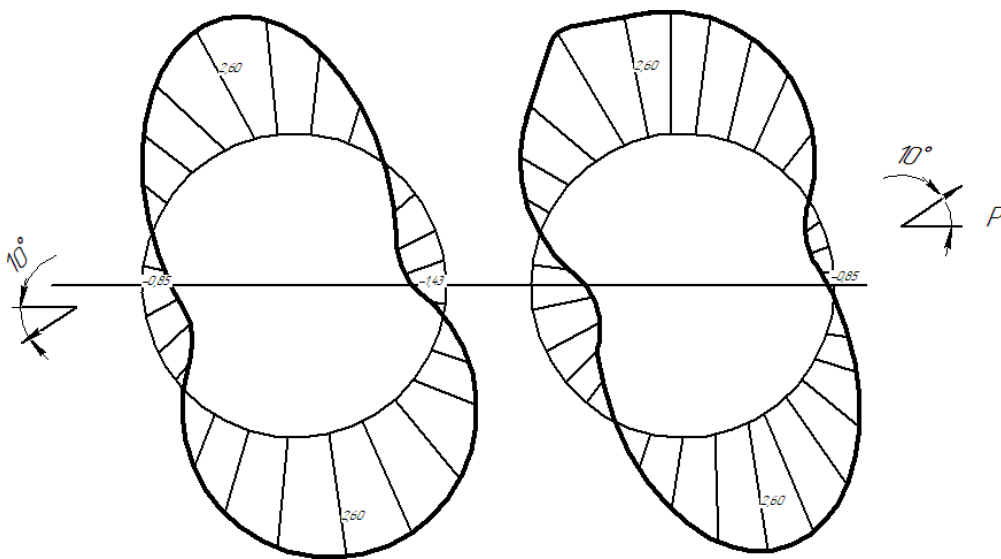


Рис. 3. Епюри напружень на контурах отворів σ_B/ρ для $d/r=2,05$, $\varphi = 10^\circ$
Fig. 3. Diagrams of the strains on contours of holes σ_B/ρ for $d/r=2,05$, $\varphi = 10^\circ$

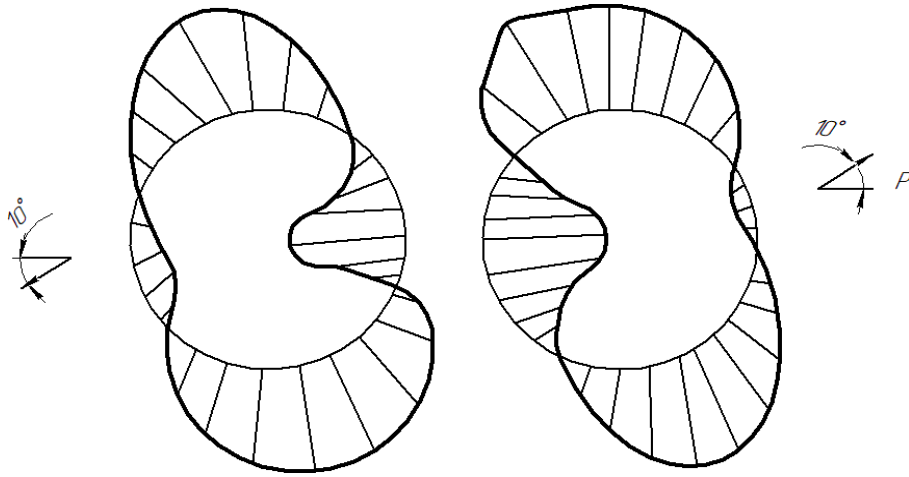


Рис. 4. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/r=2,01$, $\varphi = 10^\circ$
Fig. 4. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/r=2,01$, $\varphi = 10^\circ$

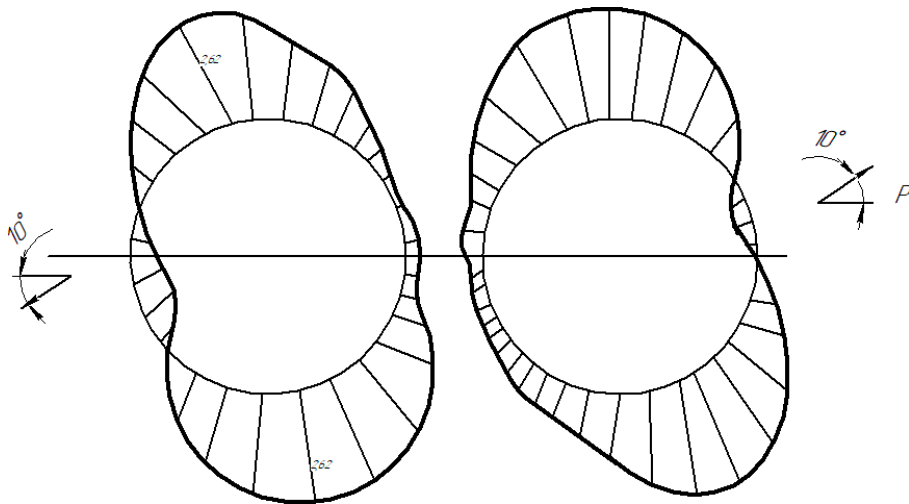


Рис. 5. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/2r=1,54$, $\varphi = 10^\circ$
Fig. 5. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/2r=1,54$, $\varphi = 10^\circ$

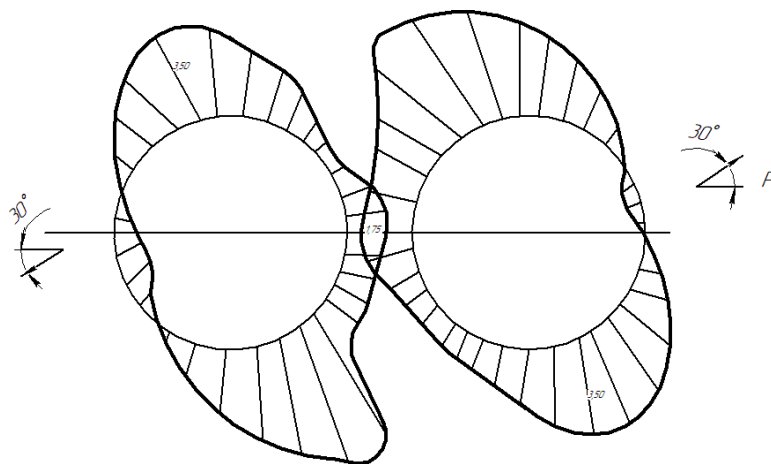


Рис. 6. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/2r=2,05$, $\varphi = 30^\circ$
Fig. 6. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/2r=2,05$, $\varphi = 30^\circ$

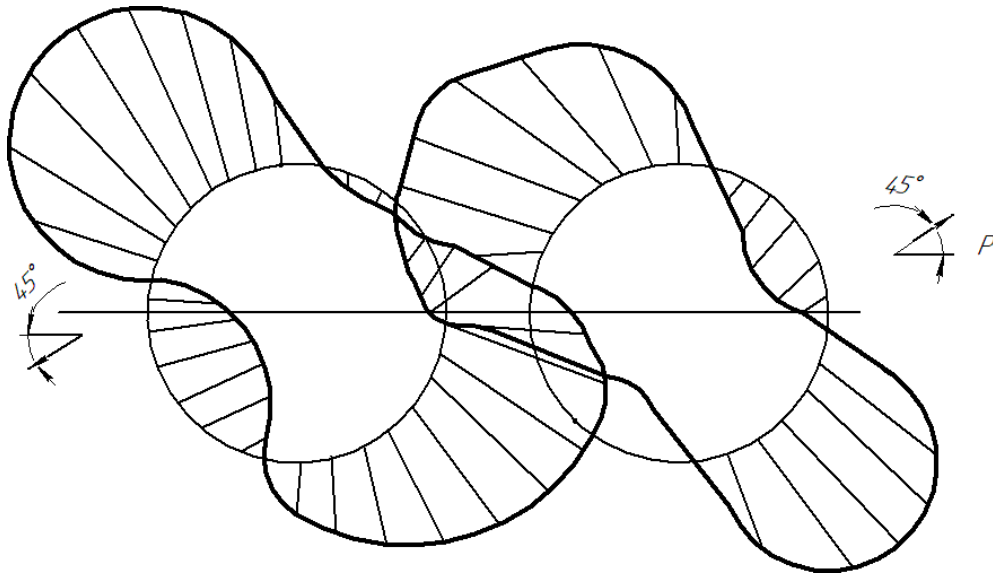


Рис. 7. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/2r=2,05$, $\varphi = 45^\circ$
Fig. 7. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/2r=2.05$, $\varphi = 45^\circ$

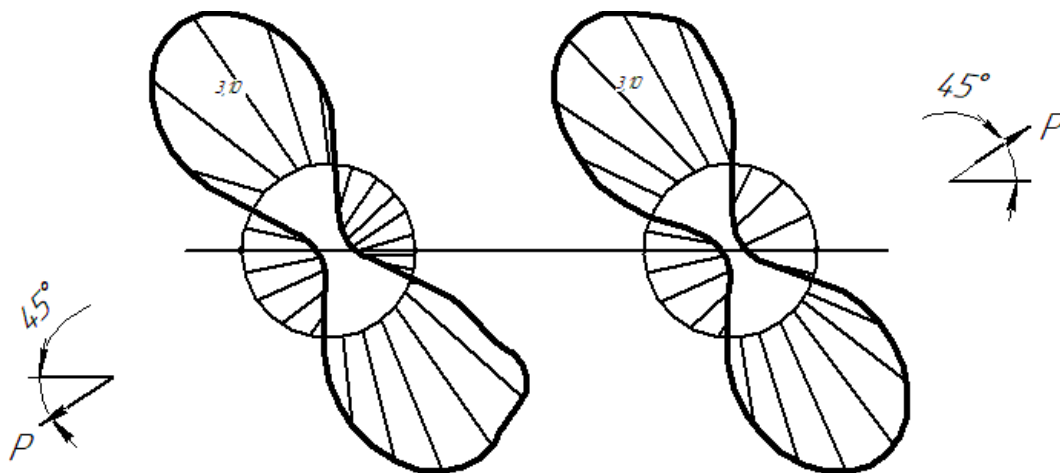


Рис. 8. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/2r=3$, $\varphi = 45^\circ$
Fig. 8. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/2r=3$, $\varphi = 45^\circ$

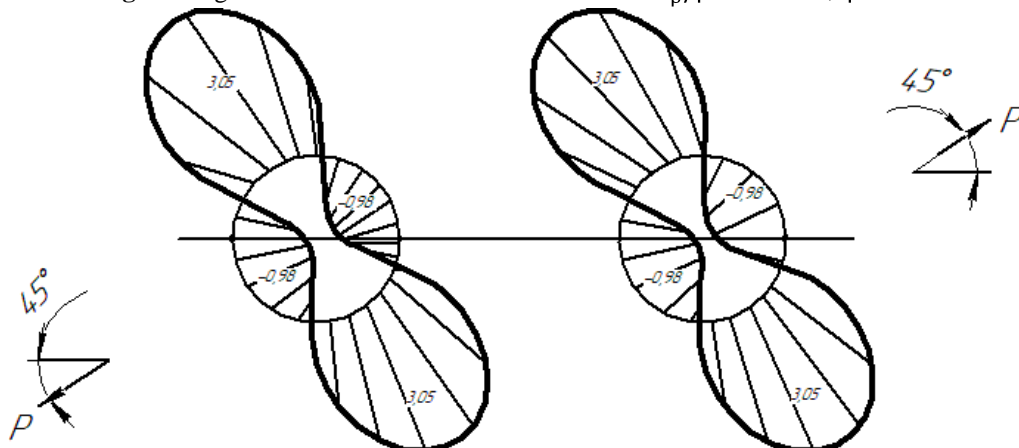


Рис. 9. Епюри напружень на контурах отворів σ_{β}/ρ для $d/2r=5$, $\varphi = 45^\circ$
Fig. 9. Diagrams of the strains on contours of holes σ_{β}/ρ for $d/2r=5$, $\varphi = 45^\circ$

Висновки. Отримано розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у пластині з двома рівними круговими отворами при розтягу під довільним кутом до лінії центрів отворів із застосуванням біполярних координат.

Із цього розв'язку отримано відомий результат для розтягу пластини з одним круговим отвором у полярних координатах.

Підрахунки та аналіз показують, що при розтягу площини з двома рівними круговими отворами під довільним кутом до лінії центрів отворів максимальні напруження мають місце в точках на контурі отвору, що відповідає куту

$$\theta = 90^\circ + \varphi \text{ при } \lambda = \frac{d}{2r} = 2.$$

Однак при зближенні отворів точка з максимальним значенням напруження зсувається до сусіднього отвору. Так, наприклад, для $\lambda = 1,06$ точка з максимальним значенням напруження має місце для $\theta = 172^\circ$ (див. рис. 1), а при віддаленні отворів, тобто при збільшенні λ , – для $\theta = 135^\circ$ ($\varphi = 45^\circ$).

Отримані результати дають змогу провести теоретичне визначення коефіцієнта концентрації напружень біля отворів і можуть бути використані в інженерній практиці під час проєктування деталей у корабле-, авіа- та машинобудуванні.

Бібліографічний список

- Бейгул О. О., Лепетова Г. Л. Методи теорії пружності для дослідження і розрахунків металургійного обладнання: навч. посіб. Дніпродзержинськ: Дніпродзерж. держ. техн. ун-т, 2014. 188 с.
- Вакуленко С. В., Калоеров С. А. Приближенный метод определения напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 2002. Вып. 35. С. 65-76.
- Довбня К., Врублевський В. Дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та трщиною. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 33-35.
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк: Донецк. нац. ун-т, 2013. 440 с.
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В. Напряженное состояние горного массива с выработками вблизи загруженной дневной поверхности. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія гірничо-електромеханічна*. 2004. Вип. 83. С. 129-134.
- Калоеров С. А., Авдюшина Е. В. Напряженное состояние горного массива с выработкой вблизи дневной поверхности. *Деформация и разрушение материалов с деформации и динамические явления в горных породах и выработках*: сб. науч. тр. X Междунар. науч. школы, г. Алушта, 18-24 сент. 2000 г. Симферополь, 2000. С. 60-62.
- Калоеров С. А., Вакуленко С. В. Решение циклической задачи для пластинки с отверстиями и трещинами и ее приложение в горном деле. *Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки*. 2004. № 1. С. 37-42.
- Калоеров С. А. Приближенный метод исследования напряженного состояния изотропной полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 2004. Вып. 39. С. 83-93.
- Калоеров С. А. Решение основных задач теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 1998. Вып. 28. С. 157-171.
- Кравець В. Напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими трщиною або смугами пластичності. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 44-47.
- Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
- Онишко Л. Й., Варивода Ю. Ю., Пономаренко О. М. Дослідження динамічної концентрації напружень на краю колового отвору за дії на нього неосесиметричного навантаження. *Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С. З. Гжицького*. 2011. 13, № 4 (50), ч. 4. С. 106-114.
- Проценко В., Українець Н. Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 85-87.
- Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
- Слободян М., Цуркан М. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними трщиною з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 96-98.
- Современные проблемы проблемы концентрации напряжений: тр. Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию академика НАН Украины А. С. Космодамианского (г. Донецк, 21-25 июня 1998 г.). Донецк, 1998. 287 с.
- Соляр Т., Максимович О. Регуляризация формулы обращения перетворения Лапласа стосовно вивчення концентрації динамічних напружень у пластинах з отворами. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 161-163.
- Сучасні проблеми механіки і математики: праці Міжнар. наук. конф., присвяч. 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018.
- Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 402 с.
- Шопа Т. Дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин з отворами та включеннями. *Сучасні проблеми механіки і математики*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): в 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 168-169.

Стаття надійшла 15.07.2022